LƯƠNG MẬU DŨNG (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN BÁU - TRẦN HỮU NHO
NGUYỄN HỮU NGỌC - LÊ ĐỨC PHÚC - LÊ MẬU THỐNG

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

HÌNH HỌC PHẲNG

Tự luận và trắc nghiệm





NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

LƯƠNG MẬU DŨNG (Chủ biên)
NGUYỄN XUÂN BÁU - NGUYỄN HỮU NGỌC
TRẦN HỮU NHO - LÊ ĐỨC PHÚC - LÊ MẬU THỐNG

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

HÌNH HỌC PHẲNG

(TỰ LUẬN VÀ TRẮC NGHIỆM)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Cùng với việc đổi mới nội dung và phương pháp dạy học, việc kiểm tra và đánh giá kết quả học tập của học sinh trong nhà trường phổ thông cũng bắt đầu được đổi mới.

Từ năm học 2006 – 2007, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã thực hiện chương trình phân ban cấp Trung học Phổ thông. Cả nước đã bắt đầu triển khai thi trắc nghiệm một số môn trong Kì thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông và Kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng.

Để giúp các em học sinh có điều kiện rèn luyện kĩ năng giải các dạng bài tập tự luận và thực hành phương pháp kiểm tra trắc nghiệm khách quan, đặc biệt là để ôn tập toàn bộ chương trình môn Toán Trung học Phổ thông, chuẩn bị tốt cho Kì thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông và Kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng hằng năm, các tác giả biên soạn cho ra mắt bộ sách "***Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông (tự luận và trắc nghiệm)***". Bộ sách gồm có 6 tập sau đây :

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Đại số

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Giải tích

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Lượng giác

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Đại số tổ hợp, Số phức, Xác suất và Thống kê

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Hình học phẳng

- Rèn luyện kĩ năng giải bài tập Toán Trung học Phổ thông - Hình học không gian

Nội dung mỗi tập sách được viết dựa theo chương trình chuẩn và nâng cao môn Toán Trung học Phổ thông hiện hành và dựa theo Hướng dẫn ôn tập thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông và Hướng dẫn ôn tập thi Tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành, gồm nhiều chủ đề của từng phân môn. Mỗi chủ đề được trình bày theo ba mục chính như sau :

A. Kiến thức cơ bản. Tóm tắt lí thuyết cơ bản cần thiết cho việc giải bài tập tự luận và trắc nghiệm.

B. Các dạng bài tập tự luận. Phân loại và hệ thống đầy đủ các dạng bài tập, trong đó nêu ra phương pháp ngắn gọn để giải và được minh hoạ bằng các câu hỏi thường gặp trong các kì thi.

C. Câu hỏi trắc nghiệm. Giới thiệu những câu hỏi trắc nghiệm khách quan bao quát nội dung các kiến thức trong từng chủ đề, cùng với phần ***Hướng dẫn***

chọn đáp án bao gồm lời giải chi tiết hoặc hướng dẫn ngắn gọn, đầy đủ, giúp các em học sinh chọn ra được đáp án nhanh chóng và chính xác.

Các tác giả đã đầu tư công sức và cố gắng biên soạn chu đáo, song những khiếm khuyết của bộ sách là điều khó tránh khỏi. Các tác giả rất mong nhận được những ý kiến đóng góp chân tình quý thầy cô giáo và các em học sinh để lần tái bản sau bộ sách được hoàn thiện hơn.

Mọi thư từ, liên lạc xin gửi về địa chỉ : Ông Lương Mậu Dũng (Chủ biên), số 52 Nguyễn Văn Nguyễn, Phường Tân Định, Quận 1, Thành phố Hồ Chí Minh. Điện thoại : 08.8483789 hay 0908331680.

Chúc các em học sinh đạt nhiều thành quả tốt đẹp trong học tập và thi cử !

CÁC TÁC GIẢ

Chuyên đề 1.

VECTƠ VÀ CÁC PHÉP TÍNH VỀ VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. CÁC ĐỊNH NGHĨA

1. Vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.
- Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có điểm đầu là A điểm cuối là B.

2. Vectơ – không

Vectơ – không có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau. Kí hiệu $\vec{0}$.

3. Vectơ cùng phương, cùng hướng

- Hai vectơ gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.
- Khi hai vectơ cùng phương, nếu hướng từ điểm đầu đến điểm cuối của hai vectơ đó giống nhau, ta nói hai vectơ đó cùng hướng. Trong trường hợp ngược lại, ta có hai vectơ ngược hướng.



$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\quad$ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng

4. Hai vectơ bằng nhau

- Độ dài của một vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.
- Độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$ kí hiệu $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$.
- Vectơ $\vec{0}$ có độ dài bằng 0.
- Vectơ đơn vị có độ dài bằng 1.
- Hai vectơ gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Hai vectơ đối nhau nếu chúng ngược hướng và có độ dài bằng nhau : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$.

II. TỔNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Từ điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ và $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Vectơ $\overrightarrow{AC}$ gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Kí hiệu : $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

2. Các tính chất của phép cộng vectơ

- Tính chất giao hoán : $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.
- Tính chất kết hợp : $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.
- Tính chất của vectơ – không : $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$.

3. Các quy tắc về tổng vectơ

- Quy tắc ba điểm : Với ba điểm bất kì M, N, P ta có :

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}.$$

- Quy tắc hình bình hành : Nếu $ABCD$ là hình bình hành, ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}.$$

- Quy tắc trung điểm : Nếu O là trung điểm đoạn AB và M là điểm tùy ý, ta có :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{O} \text{ và } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$$

- Quy tắc trọng tâm : Nếu G là trọng tâm tam giác ABC và M là điểm tùy ý, ta có :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$$

III. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$, là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b}).$$

2. Quy tắc về hiệu vectơ

Với ba điểm bất kì M, N, P ta có : $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM}$.

IV. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Định nghĩa

Tích của vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ với số thực $k \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, sao cho :

- Nếu $k > 0$ thì $k\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$.

- Nếu $k < 0$ thì $k\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$.
- Độ dài $k\vec{a}$ bằng $|k|\,|\vec{a}|$.

2. Các tính chất của phép nhân vectơ với số

Với hai vectơ bất kì $\vec{a}$, $\vec{b}$ và mọi số thực k, l ta có :

- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$.
- $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$.
- $k\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$.

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

- Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0} \Leftrightarrow$ có số k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.
- Điều kiện để 3 điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. Biểu thị một vectơ qua hai vectơ không cùng phương

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Với mọi vectơ $\vec{x}$ ta luôn có :

$$\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b},$$

với m, n là cặp số duy nhất.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

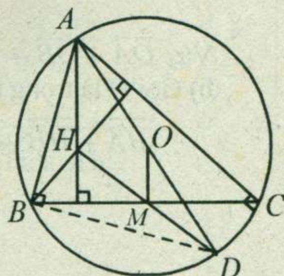
Dạng 1. CHỨNG MINH HAI VECTƠ BẰNG NHAU

Phương pháp

Để chứng minh hai vectơ bằng nhau, ta có thể sử dụng định nghĩa hoặc cạnh đối của hình bình hành.

Ví dụ. Cho tam giác ABC có trực tâm H và nội tiếp đường tâm O. AD là một đường kính của đường tròn ; HD cắt BC tại M. Chứng minh : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$ và $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

Giải



Ta có : $BD \,//\, HC$ (cùng vuông góc với AB) ;

$CD \,//\, HB$ (cùng vuông góc với AC).

Do đó $BDCH$ là hình bình hành.

Suy ra $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$ và M là trung điểm HD.

Tam giác ADH có OM là đường trung bình nên $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$.

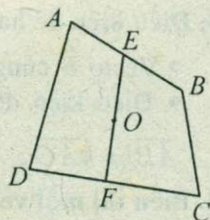
Dạng 2. CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

Phương pháp

> Sử dụng các quy tắc về tổng và hiệu vectơ.
> Biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản.
> Biến đổi cả hai vế để có một kết quả chung.

Ví dụ 1. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F, O lần lượt là trung điểm AB, CD và EF. Chứng minh : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$

Giải



Ta có : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

$$=2\overrightarrow{AE}+2\overrightarrow{AF}$$

$$=2\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}\right)$$

$$=2.2\overrightarrow{AO}=4\overrightarrow{AO}.$$

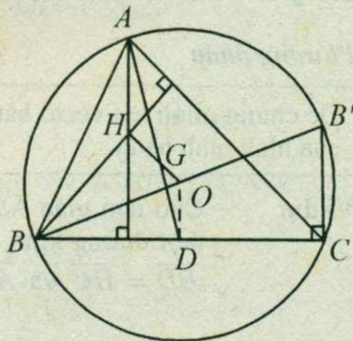
Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có trực tâm H và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh :

a) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$;

b) $\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO}$.

Giải



a) Vẽ đường kính BB', gọi D là trung điểm BC.

Dễ dàng chứng minh $AB'CH$ là hình bình hành (xem ví dụ ở Dạng 1).

Do đó $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{B'C}$, mà $\overrightarrow{B'C}=2\overrightarrow{OD}$

(OD là đường trung bình tam giác BCB') $\Rightarrow \overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OD}$ nên ta có :

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HA}=\overrightarrow{OH}-2\overrightarrow{OD}$$

$$=\overrightarrow{OH}-\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right).$$

Vậy $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=OH$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=3\overrightarrow{HG}=3\left(\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OG}\right)=3\overrightarrow{HO}+3\overrightarrow{OG}$$

$$=3\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$$

$$=3\overrightarrow{HO}+\overrightarrow{OH}\text{ (do câu } a\text{)})=2\overrightarrow{HO}\text{ (đpcm).}$$

Dạng 3. CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Phương pháp

A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}\ (k \neq 0)$.

Ví dụ. Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC và O là trung điểm AM. Xét hai điểm I, J thỏa $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC}$.

Chứng minh I, O, J thẳng hàng.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 15\overrightarrow{IJ} = 6\overrightarrow{AC} - 10\overrightarrow{AB}$ (1)

Mặt khác : $\overrightarrow{AI} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OI}\right) = 2\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{OI}\right) = 2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\left[\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{OI}\right] = 2\overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AC} - 5\overrightarrow{AB} = 12\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow 24\overrightarrow{IO} = 6\overrightarrow{AC} - 10\overrightarrow{AB}. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $15\overrightarrow{IJ} = 24\overrightarrow{IO} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = \dfrac{8}{5}\overrightarrow{IO}$.

Vậy I, O, J thẳng hàng.

Dạng 4. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

Các dạng tập hợp cơ bản :
A, B, C là ba điểm cố định, phân biệt, không thẳng hàng.

1) $\left|\overrightarrow{MA}\right| = \left|\overrightarrow{MB}\right|$: Tập hợp điểm M là đường trung trực của AB.
2) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{BC}$: Tập hợp điểm là đường thẳng qua A và song song BC.
3) $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AB}$: Tập hợp M là đường thẳng AB.
4) $\left|\overrightarrow{AM}\right| = k > 0$: Tập hợp M là đường tròn (A, k).

Biến đổi các hệ thức vectơ về các dạng cơ bản.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

a) $2\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$;

b) $\overrightarrow{MA} + (1-k)\overrightarrow{MB} - k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

Giải

a) Gọi G là trọng tâm tam giác và I là trung điểm BC. Ta có :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG} \text{ và } \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=2\overrightarrow{MI}.$$

Từ giả thiết suy ra $\left|\overrightarrow{MG}\right|=\left|\overrightarrow{MI}\right|$.

Vậy, tập hợp điểm M là trung trực đoạn GI.

b) $\overrightarrow{MA}+(1-k)\overrightarrow{MB}-k\overrightarrow{MC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI}=2k\overrightarrow{MJ}$ (I, J là trung điểm AB và BC)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI}=k\overrightarrow{MJ}$.

Vậy, tập hợp điểm M là đường thẳng song song AC và đi qua trung điểm I, J của AB và BC.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC. Tìm tập hợp các điểm M thỏa mãn :

$$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=4.$$

Giải

Gọi J là trung điểm BC. Xét điểm I thỏa mãn : $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IJ}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IJ}=\vec{0} \Leftrightarrow I$ là trung điểm AJ.

Từ giả thiết, ta có :

$\left|2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right|=4 \Leftrightarrow \left|2\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right|=4$

$\Leftrightarrow \left|4\overrightarrow{MI}+2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right|=4 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{MI}\right|=1.$

Vậy, tập hợp M là đường tròn tâm I bán kính 1.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác đều ABC. Phát biểu nào sau đây đúng ?

A) $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{AC}}=1$. B) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

C) $\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=1$. D) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{AC}\right|=0$.

Câu 2. Cho tam giác ABC. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}>\overrightarrow{BC}$. B) $\dfrac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}}=-1$.

C) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=-\overrightarrow{BA}$. D) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right|=\vec{0}$.

Câu 3. Cho tam giác đều, cạnh a. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right|=a$. B) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right|=a$.

C) $\left|\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right| = a$ D) $\left|\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right| = a$.

Câu 4. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Đẳng thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$.

C) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$. D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Câu 5. Cho hình bình hành $ABCD$. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$. B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$.

C) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$. D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Câu 6. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO}$. B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$.

C) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DC}$. D) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AD}$.

Câu 7. Cho hình bình hành $ABCD$ tâm O. Đẳng thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{CB}$. B) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}$.

C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$. D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{OC}$.

- Cho tam giác ABC. D, E, F là trung điểm các cạnh BC, CA, AB.

Giả thiết này dùng chung cho các câu 8 và 9.

Câu 8. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BF}$

B) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DC}$

C) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD}$

D) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}$

Câu 9. Cho điểm M thỏa hệ thức $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{O}$. Khi đó, M là điểm nào sau đây ?

A) Điểm E. B) Trung điểm của BE.

C) Trung điểm của DF. D) Trung điểm của EF.

Câu 10. Tam giác ABC thỏa hệ thức $\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|$ thì ABC là tam giác gì ?

A) Tam giác vuông. B) Tam giác cân.

C) Tam giác đều. D) Tam giác thường.

Câu 11. Tứ giác $ABCD$ là hình gì nếu thỏa hệ thức : $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC}$?

A) Hình thang. B) Hình chữ nhật.

C) Hình bình hành. D) Hình vuông.

Câu 12. Tứ giác $ABCD$ thỏa hệ thức $\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}$ thì tứ giác đó là hình gì ?

A) Hình bình hành. B) Hình chữ nhật.

C) Hình thang. D) Hình thoi.

Câu 13. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Trên cạnh BC lấy hai điểm M, N sao cho $BM = MN = NC$. Điểm G là điểm gì của tam giác AMN?

A) Trực tâm. B) Tâm đường tròn ngoại tiếp.
C) Tâm đường tròn nội tiếp. D) Trọng tâm.

Câu 14. Cho tam giác ABC có I là trung điểm AB. Điểm M thỏa hệ thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó, điểm M là :

A) Trung điểm IC. B) Trùng với điểm I.
C) Trung điểm BI. D) Trung điểm AI.

Câu 15. Cho tam giác ABC. Xác định điểm M thỏa hệ thức : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Khi đó, điểm M là :

A) Trọng tâm ΔABC.
B) Đỉnh của hình bình hành $ABCM$.
C) Trùng với điểm B.
D) Trung điểm BC.

Câu 16. Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng A, B, C. Vị trí của A, B, C để hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng là :

A) theo thứ tự C, A, B. B) C nằm giữa A và B.
C) theo thứ tự B, A, C. B) B nằm giữa A và C.

Câu 17. Cho ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ thỏa $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{O}$ và $OA = OB = OC$. Giá trị của góc AOB là :

A) 60^0. B) 45^0. C) 30^0. D) 120^0.

Câu 18. Tam giác ABC có trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm AM; BI cắt AC tại N. Giá trị của tỉ số $\dfrac{\overrightarrow{NI}}{\overrightarrow{NB}}$ là :

A) $\dfrac{1}{4}$. B) $\dfrac{1}{3}$. C) $\dfrac{2}{3}$. D) $\dfrac{2}{5}$.

Câu 19. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O. Hệ thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CO}$. B) $\overrightarrow{OA} = \dfrac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}{2}$.
C) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BO}$. D) $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$.

Câu 20. Tam giác ABC có AD là phân giác trong. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AC}}$. B) $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = \dfrac{AB}{AC}$.
C) $\dfrac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\dfrac{AB}{AC}$. D) $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$.

Chú ý. Khi hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương, thì : $\vec{a} = k\vec{b}$ $(k \in \mathbb{R})$ và ta quy ước viết $\frac{\vec{a}}{\vec{b}} = k$ $(k \neq 0)$.

Câu 21. Tam giác ABC có trọng tâm G và trung tuyến AM. Hệ thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MG}$.

B) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$.

C) $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

D) $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$.

Câu 22. Hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và $\overrightarrow{AD}$ khác phương với $\overrightarrow{AF}$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB}$.

B) $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{FD}$.

C) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB}$.

D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$.

Câu 23. Tam giác đều ABC, cạnh a và nội tiếp đường tròn tâm O. M là điểm bất kì. Giá trị của $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right|$ là :

A) $3a$.

B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

C) $a\sqrt{3}$.

D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 24. Hình chữ nhật $ABCD$ có tâm O và I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AO}$.

B) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$.

C) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{IK}$.

D) $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Câu 25. Cho tam giác đều ABC có cạnh a. Vectơ tổng $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$ có độ dài là :

A) $a\sqrt{3}$.

B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

B) $2a$.

D) a.

Câu 26. Cho tam giác đều ABC có cạnh a, H là trung điểm của BC. Vectơ $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH}$ có độ dài là :

A) $a\sqrt{3}$.

B) $2a$.

C) a.

D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 27. Cho tam giác đều ABC có cạnh a, M là trung điểm của AC. Vectơ $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM}$ có độ dài là :

A) $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

B) $\frac{3a}{2}$.

C) $\frac{a\sqrt{7}}{2}$.

D) một giá trị khác.

• Giả thiết sau đây dùng cho hai câu 28 và 29. Cho tam giác vuông cân ABC có $AB = AC = a$.

Câu 28. Độ dài của vectơ hiệu $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ là :

A) $2a$. B) $a\sqrt{2}$. C) $a\sqrt{3}$. D) đáp số khác.

Câu 29. Độ dài của vectơ tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ là :

A) $a\sqrt{2}$. B) $a\sqrt{3}$. C) $2a$. D) đáp số khác.

Câu 30. Tam giác vuông ABC có trọng tâm G và cạnh huyền $BC=2a$. Vectơ $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ có độ dài là :

A) $\frac{a}{2}$. B) $\frac{2a}{3}$. C) $\frac{3a}{2}$. D) đáp số khác.

Câu 31. Cho tứ giác lồi $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Đẳng thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=2\overrightarrow{MN}$. B) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{MN}$.

C) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}=-2\overrightarrow{MN}$. D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=2\overrightarrow{MN}$.

Câu 32. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa $\overrightarrow{IA}=3\overrightarrow{IB}$. Biểu thị vectơ $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ ta được :

A) $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}\right)$. B) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}$.

C) $\overrightarrow{CI}=\frac{1}{2}\left(3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}\right)$. D) $\overrightarrow{CI}=3\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$.

Câu 33. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$. Biểu thị $\overrightarrow{CI}$ theo $\overrightarrow{CA}$ và $\overrightarrow{CB}$ ta được :

A) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{4}$. B) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{2}$.

C) $\overrightarrow{CI}=\frac{\overrightarrow{CA}-3\overrightarrow{CB}}{4}$. D) $\overrightarrow{CI}=\frac{-\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}}{4}$.

• Giả thiết sau đây dùng cho các câu 34 và 35.

Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đặt $\overrightarrow{CA}=\vec{a}$; $\overrightarrow{CB}=\vec{b}$.

Câu 34. Biểu thị $\overrightarrow{BG}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được :

A) $\overrightarrow{BG}=\frac{\vec{a}+2\vec{b}}{3}$. B) $\overrightarrow{BG}=\frac{\vec{a}-2\vec{b}}{3}$.

C) $\overrightarrow{BG}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$. D) $\overrightarrow{BG}=\frac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$.

Câu 35. Biểu thị $\overrightarrow{GA}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ta được :

A) $\overrightarrow{GA} = \dfrac{2\vec{a} + \vec{b}}{3}$.
B) $\overrightarrow{GA} = \dfrac{\vec{a} - 2\vec{b}}{3}$.
C) $\overrightarrow{GA} = \dfrac{2\vec{a} - \vec{b}}{3}$.
D) $\overrightarrow{GA} = \dfrac{\vec{a} + 2\vec{b}}{3}$.

Câu 36. Cho tam giác ABC. Gọi A' là điểm đối xứng của B qua A, B' là điểm đối xứng của C qua B, C' là điểm đối xứng của A qua C. Xét các đẳng thức (với O bất kì).

I. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}$;

II. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}\right)$;

III. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = -\left(\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'}\right)$.

Đẳng thức nào đúng ?
A) Chỉ I.
B) Chỉ II.
C) Chỉ III.
D) Cả I, II, III đều sai.

Câu 37. Điểm M gọi là chia đoạn thẳng AB theo tỉ số $k \neq 1$, $k \neq 0$ khi $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB}$. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số k $(k \neq 0, k \neq 1)$ thì điểm B chia đoạn MA theo tỉ số :
A) $\dfrac{1}{k-1}$.
B) $\dfrac{1}{1-k}$.
C) $\dfrac{1}{1+k}$.
D) $-\dfrac{1}{1+k}$.

Câu 38. Nếu M chia đoạn AB theo tỉ số $k \neq 1$ và O là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng ?
A) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.
B) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}$.
C) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1+k}$.
D) $\overrightarrow{OM} = \dfrac{\overrightarrow{OA} + k\overrightarrow{OB}}{1+k}$.

Câu 39. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $AB'C'D'$ có chung đỉnh A. Xét hai mệnh đề sau : I. $\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \vec{O}$; II. Hai tam giác $BC'D$ và $B'CD'$ có cùng trọng tâm.
Mệnh đề nào đúng ?
A) Chỉ I.
B) Chỉ II.
C) I và II đều sai.
D) I và II đều đúng.

Câu 40. Cho ba điểm cố định O, A, B. Tập hợp các điểm M thỏa $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB}$ là
A) đường thẳng qua A và B.
B) trung trực đoạn AB.
C) đường thẳng vuông góc AB tại A.

D) một kết quả khác.

Câu 41. Cho ba điểm cố định O, A, B và đẳng thức :

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-2\alpha)\overrightarrow{OB}.$$

Giá trị của α để điểm M thuộc đoạn thẳng AB là :

A) $\alpha = 0$.
B) $\alpha = 1$.
C) $\alpha < 0$ hay $\alpha > 1$.
D) $0 \leq \alpha \leq 1$.

Câu 42. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. H là điểm đối xứng của B qua G. Xét các mệnh đề :

I. Tứ giác $AGCH$ là hình bình hành ;

II. $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC}$;

III. $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I.
B) Chỉ II.
C) Chỉ III.
D) Cả I, II, III đều đúng.

Câu 43. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$ $(k \neq 1)$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}$.
B) $\overrightarrow{AI} = (k+1)\overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AB}$.
C) $\overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.
D) $\overrightarrow{AI} = (k-1)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$.

Câu 44. Cho tam giác ABC có trọng tâm G và điểm D thỏa $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD}$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.
B) $\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.
C) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AG}$.
D) $\overrightarrow{AC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AG} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Câu 45. Cho tam giác ABC có $BC = a$; $AB = c$; $AC = b$. Gọi CD là đường phân giác trong của góc C. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{CD} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} - \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.
B) $\overrightarrow{CD} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$.
C) $\overrightarrow{CD} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CA} + \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB}$.
D) $\overrightarrow{CD} = \frac{b}{a+b}\overrightarrow{CA} - \frac{a}{a+b}\overrightarrow{CB}$.

Câu 46. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm P thỏa $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Hệ thức nào sau đây đúng với O là điểm bất kì ?

A) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$.
B) $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.
C) $\overrightarrow{OP} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{OB}$.
D) $\overrightarrow{OP} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$.

Câu 47. Cho hai điểm phân biệt A, B và điểm M thỏa $-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$. Xét hai mệnh đề :

I. Điểm A chia đoạn BM theo tỉ $k=-1$;

II. $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ (O là điểm bất kì).

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) I. II sai. D. I và II đúng.

Câu 48. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Điểm G thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{O}$. Xét các mệnh đề :

I. G là trung điểm của AC;

II. G là trung điểm của EF.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) I, II đều đúng.

C) Chỉ II. D) I và II đều sai.

Câu 49. Cho tứ giác $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AC và BD. Điểm G thỏa $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GJ}$. B) $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{IJ}$. C) $\overrightarrow{IG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$. D) $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{IG}$.

Câu 50. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Đặt $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$; $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$. Hệ thức nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{AB}=-\vec{a}+\vec{b}$. B) $\overrightarrow{GC}=-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

C) $\overrightarrow{AC}=-\left(2\vec{a}+\vec{b}\right)$. D) $\overrightarrow{BC}=\vec{a}-2\vec{b}$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. B	4. C	5. D
6. B	7. B	8. C	9. D	10. A
11. C	12. C	13. D	14. A	15. B
16. D	17. D	18. A	19. B	20. C
21. A	22. B	23. C	24. D	25. A
26. D	27. C	28. B	29. A	30. B
31. D	32. C	33. A	34. B	35. C
36. A	37. B	38. B	39. D	40. A
41. D	42. D	43. C	44. A	45. B
46. A	47. B	48. C	49. D	50. D

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ đúng. Chọn A

Câu 2. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} > \overrightarrow{BC}$: sai. Chọn A

Câu 3. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BH} = a\sqrt{3} \Rightarrow$ B sai. Chọn B

Câu 4. $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CB}$: sai. Chọn C

Câu 5. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow$ D sai. Chọn D

Câu 6. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA}$ sai. Chọn B

Câu 7. $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$, B đúng. Chọn B

Câu 8. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} + \underbrace{\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{FE}}_{=\vec{0}}$, C đúng Chọn C

Câu 9. $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MF} + 2\overrightarrow{ME} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MF} + \overrightarrow{ME} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow M$ là trung điểm EF. Chọn D

Câu 10. Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right| = \left|2\overrightarrow{AM}\right| = 2AM$

$\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = BC \Rightarrow BC = 2AM$

Tam giác ABC vuông tại A. Chọn A

Câu 11. $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow ABCD$ là hình bình hành. Chọn C

Câu 12. $\overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow BC \,//\, AD \Rightarrow ABCD$ là hình thang. Chọn C

Câu 13. $BM = MN = NC \Rightarrow MN$ và BC có cùng trung điểm I. Do đó G cũng là trọng tâm tam giác AMN. Chọn D

Câu 14. $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M$ trung điểm IC. Chọn A

Câu 15. $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow ABCM$ là hình bình hành. Chọn B

Câu 16. $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$ ngược hướng $\Leftrightarrow B$ nằm giữa A và C. Chọn D

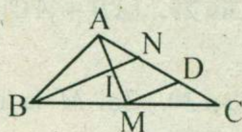
Câu 17. $OA = OB = OC \Leftrightarrow O$ là tâm đường tròn (ABC) ;

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow O$ là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow$ tam giác ABC đều $\Rightarrow \widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 120^0$. Chọn D

Câu 18. Vẽ $MD // BN \Rightarrow AN = ND = DC$

$IN = \frac{1}{2}MD = \frac{1}{4}BN \Rightarrow \frac{\overline{NI}}{\overline{NB}} = \frac{1}{4}$.



Chọn A

Câu 19. $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \Rightarrow$ B sai. Chọn B

Câu 20. $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\frac{AB}{AC}$. Chọn C

Câu 21. $\overrightarrow{MA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$, A sai. Chọn A

Câu 22. $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF}\left(= \overrightarrow{BA}\right) \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{FD}$. Chọn B

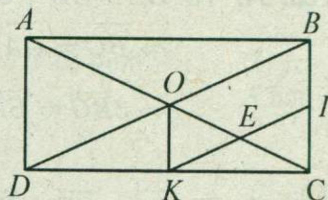
Câu 23. $\left|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right| = 3\left|\overrightarrow{MO}\right| = 3.R$

(với $M \in (0)$ và O là trọng tâm) $= 3.\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Chọn C

Câu 24. Gọi E là trung điểm IK.

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AE} = 2.\frac{3}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Chọn D



Câu 25. Gọi H là trung điểm AC.

$\left|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}\right| = 2\left|\overrightarrow{BH}\right| = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$. Chọn A

Câu 26. $\left|\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CH}\right| = \left|\overrightarrow{HA}\right| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Chọn D

Câu 27. Gọi I là trung điểm $BM \Rightarrow \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{CI}$,

$CI^2 = CM^2 + MI^2 = \frac{a^2}{4} + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{7a^2}{16}$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CM}\right| = 2CI = 2.\frac{a\sqrt{7}}{4} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$. Chọn C

Câu 28. $\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{CB}\right| = a\sqrt{2}$. Chọn B

Câu 29. $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right| = 2\left|\overrightarrow{AH}\right| = 2.\dfrac{a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. Chọn A

Câu 30. Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \dfrac{1}{2}BC = a$,

$\left|\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right| = 2\left|\overrightarrow{GM}\right| = 2.\dfrac{1}{3}AM = \dfrac{2a}{3}$. Chọn B

Câu 31. $\begin{cases}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AN} \\ \overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}\end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{MN}$: sai. Chọn D

Câu 32. Từ $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CI} = 3\left(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CI}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{2}\left(-\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}\right)$. Chọn C

Câu 33. Từ $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = \dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{CA}+3\overrightarrow{CB}\right)$ Chọn A

Câu 34. Từ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BG}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}-2\overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \dfrac{1}{3}\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)$. Chọn B

Câu 35. Từ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} = \dfrac{2\vec{a}-\vec{b}}{3}$. Chọn C

Câu 36. Ta có :

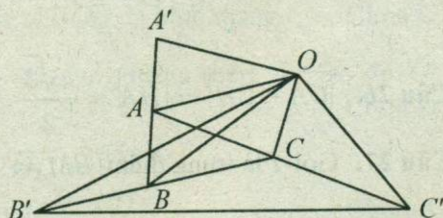
$\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA}$

$\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OC'}+\overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{OC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{OC'}$

$= \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, I đúng Chọn A



Câu 37. Từ $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BA} = k\overrightarrow{MB}$

$\Leftrightarrow (k-1)\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{1-k}\overrightarrow{BA}$. Chọn B

Câu 38. $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM} = k\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OM}\right)$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OB}}{1-k}.$$ Chọn B

Câu 39. Ta có :

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{C'C} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'} \\ \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AD} \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'} = \left(\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD'}\right) - \overrightarrow{AC'} - \left[\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) - \overrightarrow{AC}\right]$$

$$= \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC'} - \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC}\right) = \vec{0}$$, I đúng.

Gọi G là trọng tâm tam giác $BC'D$, ta có :

$$\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{GD'} + \overrightarrow{D'D} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} - (\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{DD'}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow G$ là trọng tâm tam giác $B'CD' \Rightarrow$ II đúng. Chọn D

Câu 40. $\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + (1-m)\overrightarrow{OB} = m\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}\right) + \overrightarrow{OB}$

$= m\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB} = m\overrightarrow{BA}$

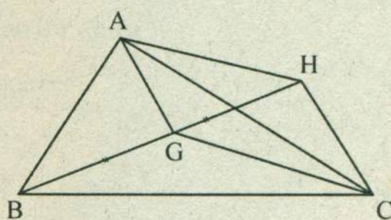
$\Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = m\overrightarrow{BA} \Leftrightarrow M \in$ đường thẳng AB cố định.

Tập hợp M là đường thẳng qua A và B. Chọn A

Câu 41. $\overrightarrow{OM} = \alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} = \alpha\overrightarrow{BA}$

$M \in$ đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow 0 \le \alpha \le 1$. Chọn D

Câu 42. • Tứ giác $AGCH$ có 2 đường chéo giao nhau tại trung điểm nên là hình bình hành $\Rightarrow$ I đúng, II đúng.



• $\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AG} = 2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AM}\right)$

$= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$

(M trung điểm BC)

$\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \frac{2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}}{3} \Rightarrow$ III đúng. Chọn D

Câu 43. $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$. Chọn C

Câu 44. $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 2\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 2.\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{AD}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AG}$ Chọn A

Câu 45. $\dfrac{\overrightarrow{DA}}{\overrightarrow{DB}} = -\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{-b}{a} \Leftrightarrow \dfrac{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}} = -\dfrac{b}{a}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{CA} + \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{CB}$. Chọn B

Câu 46. $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}\right) + 3\left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \dfrac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \dfrac{3}{5}\overrightarrow{OB}$. Chọn A

Câu 47. Từ $-2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0} \Leftrightarrow A$ là trung điểm MB,

$\Rightarrow A$ chia đoạn BM theo tỉ $k = -1 \Rightarrow$ I đúng

và $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OA} \Rightarrow$ II. Sai. Chọn B

Câu 48. Ta có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GE} + 2\overrightarrow{GF} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trung điểm $EF \Rightarrow$ II đúng. Chọn C

Câu 49. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GI} + 2\overrightarrow{GJ} = \vec{0} \Leftrightarrow G$ là trung điểm IJ

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IG}$. Chọn D

Câu 50. Từ $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GC} = -\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -\vec{a} - \vec{b} - \vec{b} = -\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$. Chọn D

Chuyên đề 2.

TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (TỪ 0^0 ĐẾN 180^0)

1. Định nghĩa

• Điểm $M(x;y)$ trên nửa đường đơn vị sao cho $\widehat{Mox}=\alpha$

+ sin của góc α, kí hiệu $\sin\alpha$, là tung độ y của M, $\sin\alpha = y$;

+ côsin của góc α, kí hiệu $\cos\alpha$, là hoành độ x, $\cos\alpha = x$;

+ tang của góc α; kí hiệu $\tan\alpha$, là tỉ số $\dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$

$$\tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$

+ côtang của góc α; kí hiệu $\cot\alpha$, là tỉ số $\dfrac{x}{y}(y\neq 0)$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

2. Liên hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

• $\sin(180^0-\alpha) = \sin\alpha. \cos(180^0-\alpha) = -\cos\alpha$

• $\tan(180^0-\alpha) = -\tan\alpha$ $(\alpha \neq 90^0)$

• $\cot(180^0-\alpha) = -\cot\alpha$ $(0^0 < \alpha < 180^0)$

3. Các hệ thức cơ bản

• $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

• $1+\tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha\neq 90^0)$

• $1+\cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^0 < \alpha < 180^0)$

II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa - Tính chất

• **Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ**

Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, là một số thực xác định bởi :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b}).$$

• **Bình phương vô hướng của một vectơ**

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

$$\overrightarrow{AB}^2 = \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = AB^2$$

2. Tính chất của tích vô hướng

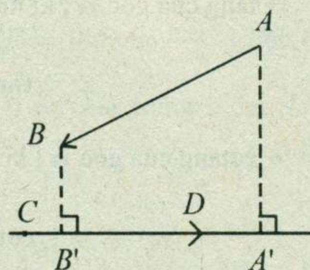
$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là ba vectơ tùy ý và k là một số thực.

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (tính giao hoán)
- $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}.(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$ (tính kết hợp)
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (tính phân phối với phép cộng)
- $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$ (điều kiện vuông góc của hai vectơ)

3. Công thức hình chiếu

• Nếu $\overrightarrow{A'B'}$ là hình chiếu của $\overrightarrow{AB}$ trên đường thẳng CD thì :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{A'B'}.\overrightarrow{CD}.$$



• ***Chú ý***

+ Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng thì :

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.$$

+ Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng thì :

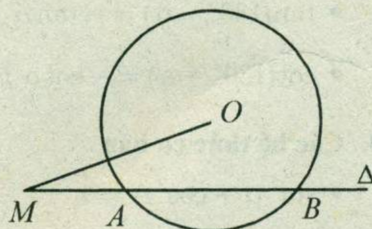
$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC.$$

4. Phương tích của một điểm đối với một đường tròn

• Cho đường tròn (O,R) và điểm M cố định.

Một đường thẳng Δ thay đổi, luôn đi qua M, cắt đường tròn tại A và B. Ta gọi phương tích của điểm M đối với đường tròn $(O;R)$, kí hiệu $\mathcal{P}_{M/(O)}$ là số thực xác định bởi :

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MO^2 - R^2.$$



• Khi M ở ngoài đường tròn $(O;R)$, và MT là tiếp tuyến của (O) (T là tiếp điểm) thì :

$$\mathcal{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. TÍNH CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC HOẶC BIỂU THỨC LƯỢNG GIÁC

Phương pháp

- Dùng giá trị lượng giác của hai góc bù nhau.
- Dùng các hệ thức cơ bản.

Ví dụ 1. Tìm các giá trị lượng giác : $\sin 150^0, \cos 120^0, \tan 135^0$.

Giải

Ta có : $\sin 150^0 = \sin\left(180^0 - 30^0\right) = \sin 30^0 = \dfrac{1}{2}$,

$\cos 120^0 = \cos 60^0 = \dfrac{1}{2}$,

$\tan 135^0 = \tan 45^0 = 1$.

Ví dụ 2. a) Biết $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, tính $\sin\alpha$ và $\cot\alpha$.

b) Đơn giản biểu thức $A = \sin 75^0 + \sin 105^0 + \cos 15^0 + \cos 165^0$.

Giải

a) Từ $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ ta được : $sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$.

Do đó : $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$; $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{1}{3} : \dfrac{2\sqrt{2}}{3} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

b) Ta có : $\sin 105^0 = \sin 75^0$; $\cos 165^0 = -\cos 15^0$.

Do đó : $A = \sin 75^0 + \sin 75^0 + \cos 15^0 - \cos 15^0 = 2\sin 75^0$.

Dạng 2. TÍNH TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp

1) Dùng định nghĩa.

2) Dùng định lí hình chiếu

3) Phân tích tích vô hướng thành nhiều tích vô hướng để áp dụng phần 1) và phần 3).

Chú ý

- $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0$.
- $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng.

  $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC$ khi $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng.

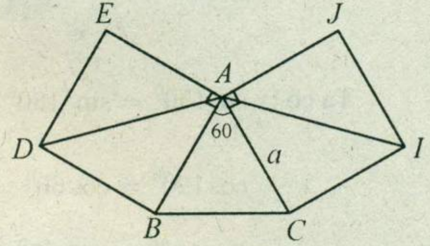
Ví dụ 1. Cho tam giác đều ABC có cạnh a. Về phía ngoài tam giác vẽ các hình vuông $ABDE$ và $ACIJ$. Tính các tích vô hướng :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ}$. b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI}$. d) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AJ}$.

Giải

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = AB.AJ\cos(90^0 + 60^0) = -a^2\sin 60^0 = -\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.



b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD} = AC.AD\cos(45^0 + 60^0)$

$= a^2\sqrt{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{3})$

$= \dfrac{(1-\sqrt{3})a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AI} = AD.AI\cos(90^0 + 60^0) = -2a^2\sin 60^0 = -a^2\sqrt{3}$.

d) $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AJ} = AE.AJ\cos(120^0) = -\dfrac{a^2}{2}$.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có ba cạnh $BC = a, AC = b, AB = c$ và các trung tuyến AD, BE, CF. Gọi H là trực tâm.Tính :

a) $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DA}$. b) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}$.

Giải

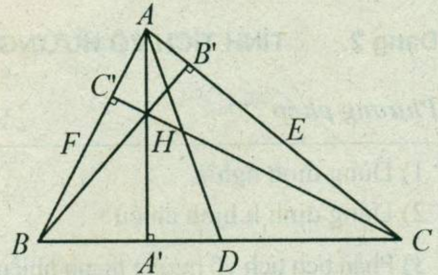
a) $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{HD}.\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC})(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AC})$

$= \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BC'}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB'}.\overrightarrow{CA})$

$= \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA'}.\overrightarrow{CB})$

$= \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BA'} - \overrightarrow{CA'}).\overrightarrow{BC}$

$= \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{4}BC^2 = \dfrac{a^2}{4}$.



b) Ta có : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \dfrac{1}{2}(AC^2 - AB^2) = \dfrac{1}{2}(b^2 - c^2)$.

Tương tự ta có : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}(c^2 - a^2)$ và $\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{2}(a^2 - b^2)$.

Do đó : $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CF}.\overrightarrow{AB}=0$.

Dạng 3. CHỨNG MINH ĐẲNG THỨC BẰNG TÍCH VÔ HƯỚNG

Phương pháp

- Dùng các phương pháp ở Dạng 2.
- Sử dụng bình phương vô hướng của một vectơ.

Ví dụ 1. Cho hình bình hành $ABCD$. Từ C kẻ $CE\perp AB$ và $CF\perp BD$. Chứng minh $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=BC^2$.

Giải

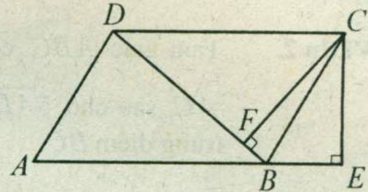
Ta có :

$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BC}$ (định lí hình chiếu)

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=\left(\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BA}\right)\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC}=BC^2$.



Vậy $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{BF}-\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BE}=BC^2$.

Ví dụ 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$ tâm O; M là điểm tuỳ ý. Chứng minh : $MA^2-MB^2=MD^2-MC^2$.

Giải

Ta có : $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=2\overrightarrow{MO}\Rightarrow\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}\right)^2=\left(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}\right)^2$

$\Leftrightarrow MA^2+MC^2+2\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=MB^2+MD^2+2\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$. (1)

Ta lại có : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}\right)$

$=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OM}.\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+OM^2$

$=-OA^2+OM^2=OM^2-OA^2$

Tương tự : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}=OM^2-OB^2=OM^2-OA^2$

Do đó : $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MD}$.

Từ (1) $\Rightarrow MA^2+MC^2=MB^2+MD^2$.

Vậy $MA^2-MB^2=MD^2-MC^2$.

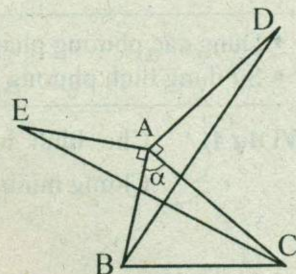
Dạng 4. CHỨNG MINH HAI ĐƯỜNG THẲNG (ĐOẠN THẲNG) VUÔNG GÓC

Phương pháp

Sử dụng $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $\widehat{BAC} = \alpha$. Về phía ngoài tam giác vẽ $AD = AC$ và $AD \perp AC$; $AE = AB$ và $AE \perp AB$. Chứng minh $BD \perp CE$.

Giải



Ta có : $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}\right)$

$= \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AD.AE\cos\widehat{DAE} + AB.AC.\cos\alpha$

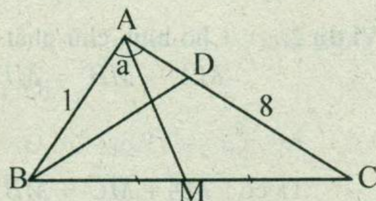
$= AB.AC\left(\cos\widehat{DAE} + \cos\alpha\right)$ mà

$\widehat{DAE} = 180^0 - \alpha \Rightarrow \cos\widehat{DAE} = -\cos\alpha$

nên $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{CE} = 0$. Vậy $BD \perp CE$.

Ví dụ 2. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$, $AB = 4$; $AC = 8$. Lấy điểm D trên AC sao cho $5\overrightarrow{AD} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Chứng minh $BD \perp AM$ với M là trung điểm BC.

Giải



Ta có :

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right).$$

Mà $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ (giả thiết), nên :

$$\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} - AB^2 - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \frac{2}{5}AC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}AB.AC\cos 60^0 - AB^2 + \frac{2}{5}AC^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{5}.4.8 \times \frac{1}{2} - 16 + \frac{2}{5}.64\right) = \frac{1}{2}(0) = 0.$$

Do đó : $\overrightarrow{BD} \perp \overrightarrow{AM}$. Vậy $BD \perp AM$.

Dạng 5. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

Các dạng cơ bản : Cho ba điểm A, B, C cố định, không thẳng hàng.

- $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = 0 \Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường tròn đường kính BC.
- $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow$ Tập hợp điểm M là đường thẳng (Δ) đi qua A và vuông góc với BC.

Ví dụ 1. Tam giác vuông ABC có cạnh huyền $BC = a$. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = a^2$.

Giải

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và I là trung điểm BC.

$\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right) = 3\overrightarrow{MG}.2\overrightarrow{MI} = a^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MI} = \dfrac{a^2}{6}$.

Gọi O là trung điểm GI, ta lại có :

$$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{MI} = \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OG}\right)\left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OI}\right) = \frac{a^2}{6}$$

$$\Leftrightarrow MO^2 - OI^2 = \frac{a^2}{6} \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{6} + OI^2.$$

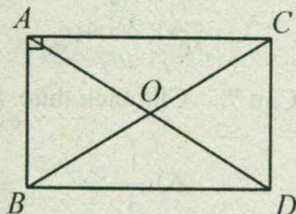
Mà $OI = \dfrac{1}{6}AI = \dfrac{a}{12}$ nên $MO^2 = \dfrac{25a^2}{144} \Rightarrow MO = \dfrac{5a}{12}$.

Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn $\left(O;\dfrac{5a}{12}\right)$.

Ví dụ 2. Tam giác ABC vuông tại A. Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = MA^2$$

Giải



Ta có : $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = MA^2$

$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}\right)\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}\right) - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = MA^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA}\left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}\right) = 0$ (ABCD là hình chữ nhật có tâm O)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow MA \perp CD \Rightarrow M \in AC$.

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng AC.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giá trị biểu thức

$P = \cos^2 0^0 - \tan^2 135^0 + \cot^2 60^0 + \cos^2 90^0 + \cos^2 120^0$ là :

A) $\frac{5}{12}$. B) $\frac{1}{4}$. C) $\frac{7}{12}$. D) đáp số khác.

Câu 2. Giá trị biểu thức $A = 3\cos^2 135^0 - \tan^2 30^0 + \cos 180^0 + \cot 150^0$ là :

A) $\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{2\sqrt{3}}{3} + 1$. B) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} + 1$.

C) $\frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$. D) $\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1$.

Câu 3. Biểu thức

$B = \cos 35^0 + \cos 45^0 + \cos 55^0 + ... + \cos 125^0 + \cos 135^0 + \cos 145^0$

có giá trị là :

A) 0. B) 1. C) 3. D) 6.

Câu 4. Biểu thức

$C = \tan 7^0 . \tan 14^0 . \tan 28^0 . \tan 34^0 . \tan 56^0 . \tan 62^0 . \tan 76^0 . \tan 83^0$

có giá trị là :

A) 4. B) 3. C) 2. D) 1.

Câu 5. Đơn giản biểu thức $\sin 75^0 + \sin 105^0 + \cos 15^0 + \cos 165^0$ ta được kết quả nào sau đây ?

A) $2\sin 75^0$. B) $-2\cos 15^0$.

C) 0. D) Kết quả khác.

Câu 6. Đơn giản biểu thức

$2\cos(180^0 - \alpha). \tan\alpha . \cot(180^0 - \alpha). \sin(180^0 - \alpha). \cot\alpha$ ta được :

A) $2\cos\alpha$. B) $-2\sin\alpha$. C) $-2\sin^2\alpha$. D) $2\cos^2\alpha$.

Câu 7. Cho biểu thức $P = \frac{4\cos\alpha - 3\sin\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$. Giá trị của P khi $\tan\alpha = 2$ là :

A) $\frac{1}{3}$ B) $-\frac{1}{3}$ C) $\frac{2}{3}$ D) $-\frac{2}{3}$

Câu 8. Biết $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ và $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Giá trị $\sin\alpha$ là :

A) $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B) $\frac{\sqrt{5}}{3}$. C) $\frac{1}{3}$. D) $\frac{2}{3}$.

Câu 9. Cho $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ với $a \neq 90^0$, $a \neq 0^0$, $a \neq 180^0$. Xét các hệ thức :

I. $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$; II. $1 - \cot^2 a = \frac{1}{\sin^2 a}$.

Hệ thức nào đúng ?

A) Chỉ I
B) Chỉ II.
C) I và II đều đúng.
D) I và II đều sai.

Câu 10. Cho $\cot x = -3$. Chọn kết quả đúng.

A) $\tan x = 3$.
B) $\sin x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$.
C. $\cos x = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$.
D) $\tan x = \dfrac{1}{3}$.

Câu 11. Biết $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$. Tìm $\sin x.\cos x$.

A) $2\sqrt{2}$.
B) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
C) $\dfrac{1}{2}$.
D) Đáp số khác.

Câu 12. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?

A) $\cos(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.
B) $\sin(180^0 - \alpha) = -\sin\alpha$.
C) $\sin(180^0 - \alpha) = \cos\alpha$.
D) $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$.

Câu 13. Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai ?

A) $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x\cos x$.
B) $(\cos x - \sin x)^2 = 1 - 2\sin x\cos x$.
C) $\cos^4 x = 1 - \sin^4 x$.
D) $\sin^4 x - \cos^4 x = \sin^2 x - \cos^2 x$.

Câu 14. Cho $\tan x + \cot x = \sqrt{5}$. Tìm $\tan^2 x + \cot^2 x$.

A) 5.
B) 3.
C) 4.
D) 1.

Câu 15. Cho tam giác đều ABC có cạnh a. Tích vô hướng nào sau đậy đúng ?

A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = a^2$.
B) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CA} = -\dfrac{a^2}{2}$.
C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
D) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = -\dfrac{a^2}{2}$.

• Giả thiết sau đây dùng chung cho các câu 16, 17 và 18.
Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi G và H là trọng tâm và trực tâm của tam giác đó.

Câu 16. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GC}$ là :

A) $-\dfrac{a^2}{6}$.
B) $\dfrac{a^2}{6}$.
C) $\dfrac{a^2}{2}$.
D) $-\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 17. Tích vô hướng $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC}$ bằng :

A) 0. B) $\frac{a^2}{4}$. C) $-\frac{a^2}{4}$. D) $\frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Tích vô hướng $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CG}$ bằng :

A) $\frac{a^2}{6}$. B) $-\frac{a^2}{6}$. C) $-\frac{a^2}{12}$. D) $\frac{a^2}{12}$.

• Giả thiết sau đây dùng chung cho hai câu 19 và 20.

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O bán kính R.

Câu 19. Giá trị của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}$ là :

A) $\frac{R^2}{2}$. B) $\frac{3R^2}{2}$. C) $-\frac{3R^2}{2}$. D) 0.

Câu 20. Gọi M là điểm bất kì trên đường tròn $(O;R)$. Tính $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM}$ ta được :

A) $\frac{3R^2}{2}$. B) $-\frac{3R^2}{2}$. C) $-\frac{R^2}{2}$. D) $\frac{R^2}{2}$.

Câu 21. Cho hai tam giác vuông AMB và ANB với $\widehat{M} = \widehat{N} = 90^0$. AM cắt BN tại I. Biết $AB = a$. Giá trị của $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ là :

A) $4a^2$ B) $2a^2$ C) a^2 D) Đáp số khác.

Câu 22. Cho 3 điểm A, B, C phân biệt. Xét các mệnh đề :

I. Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng hướng thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC$;

II. Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ ngược hướng thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -AB.AC$;

III. Nếu $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương thì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB}.\overline{AC}$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Câu I, II, III đều đúng.

• Giả thiết sau đây dùng chung cho các câu 23, 24, 25 và 26.

Cho đường tròn $(O;R)$ có hai đường kính AOB và COD vuông góc. M trung điểm cung $BC.AM$ cắt OC tại N.

Câu 23. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM}$ là :

A) $\left(2+\sqrt{2}\right)R^2$. B) $\left(2-\sqrt{2}\right)R^2$.

C) $\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)R^2$. D) $\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)R^2$.

Câu 24. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ bằng :

A) $2R\sqrt[2]{2}$ B) $R^2\sqrt{2}$ C) $2R^2$ D) đáp số khác.

Câu 25. Tích vô hướng $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC}$ bằng :

A) $2R^2$. B) $R^2\sqrt{2}$. C) $R^2\sqrt{3}$. D) $2R^2\sqrt{2}$.

Câu 26. Tính tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}$ ta được :

A) $R^2\sqrt{2}$. B) $\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$. C) $\frac{R^2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$. D) đáp số khác.

• Giả thiết sau đây dùng chung cho các câu 27, 28 và 29.

Cho tam giác ABC có $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$. Về phía ngoài tam giác, kẻ hai hình vuông $ABEF$ và $ACIJ$.

Câu 27. Xét các mệnh đề :

I. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AC}$. II. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AJ}$.

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I B) Chỉ II C. I.II sai D) I.II đúng.

Câu 28. Tính $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}$ ta có kết quả là :

A) $c^2\sqrt{2}$. B) $\frac{c^2\sqrt{2}}{2}$. C) c^2. D) $2c^2$.

Câu 29. Gọi O là trung điểm BC. Tính $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{FJ}$ ta được :

A) a^2. B) b^2. C) c^2. D) 0.

Câu 30. Cho tam giác $ABCD$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD}$.

B) $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

C) $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = 2\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB}$.

D) $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$.

Câu 31. Cho bốn điểm A, B, C, D tuỳ ý. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DA} = 0$.

B) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0$.

C) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DC} = 0$.

D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BD} = 0$.

Câu 32. Cho hai đường thẳng AB, CD cắt nhau tại M và thoả mãn hệ thức $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD}$. Xét các mệnh đề sau :

I. Tứ giác $ABCD$ là hình thang.

II. A, B, C, D cùng thuộc môt đường tròn.

Chọn mệnh đề đúng trong hai mệnh đề trên.

A) I và II đúng. B) Chỉ I. C) Chỉ II. D) I và II sai.

Câu 33. Cho đường tròn có tâm O và bán kính $R = \sqrt{3}$. M là một điểm cách O một khoảng bằng 3. Đường thẳng qua M cắt đường tròn tại A và B. Giá trị của tích vô hướng $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$ là :

A) 3. B) 4. C) 5. D) 6.

Câu 34. Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính $AB = 2R$. Gọi I là giao điểm của AM và BN. Tính $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$ theo R ta được :

A) $4R^2$. B) $3R^2$. C) $2R^2$. D) đáp số khác.

Câu 35. Cho tam giác ABC có $AB = \sqrt{6} - \sqrt{2}$; $AC = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{3}$. Số đo của góc A bằng :

A) 120^0. B) 60^0. C) 45^0. D) 30^0.

Câu 36. Cho hình thang vuông $ABCD$; đường cao AB và hai cạnh đáy AD và BC thoả mãn $AB^2 = AD.BC$. Tích vô hướng $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}$ có giá trị bằng

A) $2AB^2$. B) $\dfrac{BC^2}{2}$. C) $AC^2\sqrt{2}$. D) 0.

Câu 37. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM^2$ là :

A) đường tròn đường kính AB.

B) đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

C) đường thẳng vuông góc AB.

D) tập hợp khác.

Câu 38. Cho tam giác ABC. Tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ là :

A) đường thẳng vuông góc với AB tại A.

B) đường tròn đường kính AC.

C) đường thẳng vuông góc với AB và đi qua C.

D) tập hợp khác.

Câu 39. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thoả mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2$ là :

A) đường tròn tâm O bán kính $a\sqrt{2}$ (O là tâm đường tròn ABC).

B) đường tròn tâm G bán kính a.

C) đường tròn tâm H bán kính $a\sqrt{3}$.

D) tập hợp khác.

Câu 40. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Tập hợp các điểm M thoả mãn : $2MB^2 - MC^2 = a^2$ là tập hợp nào sau đây ?

A) Đường tròn đường kính BC.

B) Đường tròn có tâm là trọng tâm G và bán kính $a\sqrt{3}$.

C) Đường tròn có tâm I là trung điểm BC và bán kính $a\sqrt{3}$.

D) Đường tròn có tâm J chia BC theo tỉ số $\frac{1}{2}$ và bán kính $a\sqrt{3}$.

Câu 41. Cho hình thang vuông $ABCD$ có đường cao AB. Tập hợp các điểm M thoả mãn $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MB^2$ là :

A) đường chéo AC.

B) đường tròn đường kính BC.

C) đường thẳng $(\Delta) \perp OB$ tại B.

D) một tập hợp khác.

• Giả thiết sau đây dùng chung cho các câu 42 và 43.

Cho đường tròn $(O;R)$ có đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA, dựng dây cung $PQ \perp AB$ tại H, I là trung điểm HP.

Câu 42. Phương tích của điểm I đối với đường tròn $(O;R)$ là :

A) $-\frac{9R^2}{16}$.

B) $-\frac{9R^2}{8}$.

C) $-\frac{9R^2}{4}$.

D) một đáp số khác.

Câu 43. Đường thẳng AI cắt đường tròn tại K. Độ dài IK bằng :

A) $\frac{9R\sqrt{7}}{28}$. B) $\frac{9R\sqrt{7}}{16}$. C) $\frac{9R\sqrt{7}}{20}$. D) $\frac{9R\sqrt{7}}{25}$

Câu 44. Cho điểm I ở miền trong đường tròn tâm O. Qua I vẽ dây cung AB bất kì và dây cung $EF \perp OI$. Các tiếp tuyến với đường tròn tại E và F cắt nhau tại C. Xét các mệnh đề sau :

I. $\mathcal{P}_{I/(O)} = -IE^2$;

II. $\mathcal{P}_{I/(O)} = \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IC}$;

III. Tứ giác $OACB$ nội tiếp.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I đúng.

B) Chỉ có I và II đúng.

C) Chỉ có II và III đúng.

D) Cả I, II, III đều đúng.

Câu 45. Hai dây cung AB và CD của đường tròn (O) cắt nhau tại I. Hãy tính IC và ID nếu biết $IA = 12, IB = 16$, $CD = 32$ và $IC > ID$.

A) $IC = 25, ID = 7$.

B) $IC = 24, ID = 8$.

C) $IC = 26, ID = 6$.

D) $IC = 28, ID = 4$.

Câu 46. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao AD. Đường tròn (B, BD) cắt đường tròn (C, CA) tại E và F. AD cắt EF tại I. Xét các mệnh đề sau :

I. Điểm I có cùng phương tích đối với hai đường tròn đã cho ;

II. $\mathcal{P}_{I/(B;BD)} = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF}$;

III. $\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{ID}$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ I và III.

C) Cả I, II và III đều đúng. D) Cả I, II, III đều sai.

Câu 47. Cho đường tròn $(O;R)$ và điểm cố định A với $OA = \frac{R}{2}$, BC là dây cung quay quanh A. Vẽ đường tròn đường kính BC và MN là dây cung vuông góc với BC tại A. Tập hợp điểm M và N là :

A) đường tròn tâm A bán kính $\frac{3R}{2}$.

B) đường tròn $\left(A, \frac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

C) đường tròn $\left(A, \frac{R\sqrt{2}}{2}\right)$.

D) đường thẳng vuông góc với OA tại A.

Câu 48. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ hai tiếp tuyến chung ngoài $(\Delta_1),(\Delta_2)$ và tiếp tuyến chung trong (Δ_3). Trục đẳng phương của (O) và (O') là :

A) (Δ_1). B) (Δ_2). C) (Δ_3). D) OO'.

Câu 49. Cho đường tròn (O,R) có đường kính AB ; (Δ) tiếp tuyến của (O) tại B. MON là đường kính bất kì. AM và AN cắt (Δ) tại E và F. Phát biểu nào sau đây sai ?

A) $\mathcal{P}_{O/(AEF)} = -\frac{3}{2}R^2$.

B) $\mathcal{P}_{B/(AEF)} = -4R^2$.

C) $AM.AE = AN.AF$.

D) AB không phải là trục đẳng phương của (O) và (AEF).

Câu 50. Tam giác ABC có BE, CF là đường cao và H là trực tâm. Hai đường BC và EF cắt nhau tại I. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $IE.IF = IA^2$. B) $IE.IF = IH^2$.

C) $IB.IC = IA^2$. D) $IE.IF = IB.IC$.

ĐÁP ÁN

1. C	2. C	3. A	4. D	5. A
6. D	7. D	8. B	9. A	10. B

11. C	12. D	13. C	14. B	15. D
16. B	17. C	18. C	19. D	20. D
21. C	22. D	23. D	24. C	25. B
26. A	27. B	28. C	29. D	30. A
31. B	32. C	33. D	34. A	35. A
36. B	37. A	38. C	39. B	40. D
41. C	42. A	43. A	44. D	45. B
46. C	47. B	48. C	49. A	50. D

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Ta có : $\cos 0^0 = 1, \tan 135^0 = -\tan 45^0 = -1,\ \cot 60^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\cos 90^0 = 0$; $\cos 120 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow P = \frac{7}{12}$. Chọn C

Câu 2. Ta có : $\cos 135^0 = -\cos 45^0 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\tan 30^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\cos 180^0 = -1$; $\cot 150^0 = -\cot 30^0 = -\sqrt{3} \Rightarrow A = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{2}}{2} - 1$.

Chọn C

Câu 3. Ta có : $\cos 145^0 = -\cos 35^0 \Leftrightarrow \cos 35^0 + \cos 145^0 = 0$. Tương tự :
$\cos 45^0 + \cos 135^0 = 0, ..., \cos 85^0 + \cos 95^0 = 0 \Leftrightarrow B = 0$. Chọn A

Câu 4. Ta có : $\tan 83^0 = \cot 7^0 \Leftrightarrow \tan 7^0 . \tan 83^0 = \tan 7^0 \cot 7^0 = 1$;
$\tan 14^0 \tan 76^0 = 1 .... \Rightarrow C = 1$. Chọn D

Câu 5. Ta có : $\sin 105^0 = \sin 75^0; \cos 165^0 = -\cos 15^0$

$\Rightarrow \sin 75^0 + \sin 105^0 + \cos 165^0 + \cos 15^0 = 2 \sin 75^0$. Chọn A

Câu 6. Ta có : $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$; $\cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha$;

$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$.

Suy ra, biểu thức bằng $2\cos^2\alpha$. Chọn D

Câu 7. Ta có : $\sin\alpha + \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \tan\alpha \neq -1$. Chia tử và mẫu của P cho
$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow P = \frac{4 - 3\tan\alpha}{\tan\alpha + 1} = -\frac{2}{3}$. Chọn D

Câu 8. Ta có : $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \frac{5}{9} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. Chọn B

Câu 9. Ta có : $1-\cot^2 a = 1-\dfrac{\cos^2 a}{\sin^2 a} = \dfrac{\sin^2 a - \cos^2 a}{\sin^2 a} \neq \dfrac{1}{\sin^2 a} \Rightarrow II$ sai.

$1+\tan^2 a = 1+\dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{\cos^2 a + \sin^2 a}{\cos^2 a} = \dfrac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow I$ đúng. Chọn A

Câu 10. $\sin^2 x = \dfrac{1}{1+\cot^2 x} = \dfrac{1}{10} \Rightarrow \sin x = \dfrac{1}{\sqrt{10}}$. Chọn B

Câu 11. $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2$

$\Rightarrow \sin x \cos x = \dfrac{1}{2}$. Chọn C

Câu 12. $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$. Chọn D

Câu 13. $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2 = (1-\sin^2 x)^2 = 1+\sin^4 x - 2\sin^2 x \Rightarrow C$ sai.

Chọn C

Câu 14. $\tan x + \cot x = \sqrt{5} \Rightarrow \tan^2 x + \cot^2 x + 2\tan x \cot x = 5$

$\Leftrightarrow \tan^2 x + \cot^2 x = 3$ (vì $\tan x.\cot x = 1$). Chọn B

Câu 15. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB} = AC.CB\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{CB}\right) = a^2\cos 120^0 = -\dfrac{a^2}{2}$. Chọn D

Câu 16. $\overrightarrow{BG}.\overrightarrow{GC} = BG^2\cos 60^0 = \left(\dfrac{2}{3}.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right).\dfrac{1}{2} = \dfrac{a^2}{6}$. Chọn B

Câu 17. $\overrightarrow{HB}.\overrightarrow{HC} = HB^2\cos\left(-180^0\right) = \dfrac{-a^2}{4}$. Chọn C

Câu 18. $\overrightarrow{GH}.\overrightarrow{CG} = GH.CG\cos(-120^0) = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}.\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{a^2}{12}$. Chọn C

Câu 19. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}\right)$

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{AB}\left(2\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)\right)$

$= \overrightarrow{AB}\left(3\overrightarrow{OC}\right) = 3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OC} = O$ (vì $AB \perp OC$). Chọn D

Câu 20. $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right)$

$= \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} - \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)\overrightarrow{OM} + OM^2$

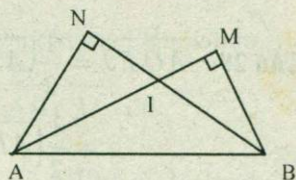
$= \dfrac{-R^2}{2} + R^2 + \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OM} = \dfrac{R^2}{2}$. Chọn D

Câu 21. Ta có : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI}$

$=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$ (định lí hình chiếu)

$=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}$

$=AB^2=a^2$.



Chọn C

Câu 22. Câu I, II, III đều đúng. Chọn D

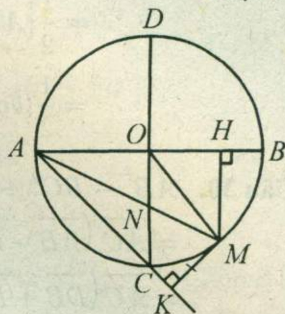
Câu 23. Kẻ $MH\perp AB$, $MK\perp AC$

$\Rightarrow OH=MH=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

Ta có :

$\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AH}=AO.AH$

$=R.\left(R+\dfrac{R\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}R^2$.



Chọn D

Câu 24. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AB}=AO.AB=2R^2$. Chọn C

Câu 25. $\overrightarrow{OM}$ cùng hướng $\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{AC}=OM.AC=R^2\sqrt{2}$. Chọn B

Câu 26. Tam giác OAC có AN là tia phân giác

$\Rightarrow\dfrac{\overline{NC}}{\overline{NO}}=-\dfrac{AC}{AO}=-\sqrt{2}\Rightarrow\dfrac{CN}{ON}=\sqrt{2}$

$\Rightarrow\dfrac{CN}{OC}=\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\Rightarrow CN=\dfrac{\sqrt{2}R}{1+\sqrt{2}}$

Ta có $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}\right)=AC^2+\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CN}=2R^2-\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CN}$

$=2R^2-\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CN}=2R^2-CO.CN$

$=2R^2-R.\dfrac{R\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=R^2\sqrt{2}$. Chọn A

Câu 27. $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AJ}=AF.AJ\cos(180^0-A)$

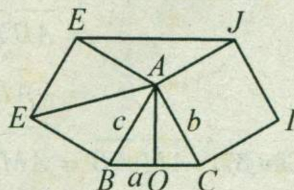
$=-AB.AC\cos A=-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\Rightarrow$ II sai. Chọn B

Câu 28. $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AE}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)$

$=\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=c\sqrt{2}.c\cos 45^0=c^2$.

Chọn C



Câu 29. $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{FJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AF}\right)$

$$= \frac{1}{2}\Big(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF} + \underbrace{\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AJ}}_{0} - \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AF}}_{0}\Big)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AF}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[AB.AJ\cos(90^0 + A) - ACAF\cos(90^0 + A)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(bc - bc)\cos(90^0 + A) = 0.$$ Chọn D

Câu 30. $AB^2 - BC^2 + CD^2 - AD^2 = \left(\overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{BC}^2\right) + \left(\overrightarrow{CD}^2 - \overrightarrow{AD}^2\right)$

$= \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD}\right)\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AD}\right)$

$= \overrightarrow{AC}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}\right) = 2\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB} \Rightarrow A$ đúng. Chọn A

Câu 31. $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} = \left(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA}\right)\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} = \left(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}\right)\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DA}$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = \left(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}\right)\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{DB} = 0 \Rightarrow B$ đúng. Chọn B

Câu 32. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}.\overrightarrow{MD} \Leftrightarrow A, B, C, D$ cùng thuộc một đường tròn. Chọn C

Câu 33. $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \mathcal{P}_{M/(0)} = OM^2 - R^2 = 3^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2 = 6.$ Chọn D

Câu 34. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BN}.\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI}$ (định lí hình chiếu)

$= \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI}\right) = AB^2 = 4R^2.$ Chọn A

Câu 35. $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC\cos A$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{8 + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)^2 - 12}{2\left(2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 120^0.$ Chọn A

Câu 36. $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}\right)$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}}_{0} - AB^2 + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB}}_{0}$$

$= -AB^2 + BC.AD = O$ (giả thiết). Chọn D

Câu 37. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = AM^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{MB} = 0$

$\Leftrightarrow AM \perp MB \Leftrightarrow$ Tập hợp M là đường tròn đường kính AB. Chọn A

Câu 38. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CM} = 0$

$\Leftrightarrow AB \perp CM$.

Suy ra, tập hợp điểm M là đường thẳng $(\Delta) \perp AB$ và đi qua C. Chọn C

Câu 39. Ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4a^2$

$$\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM}\right)^2 + \left(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM}\right)^2 = 4a^2,$$

với G là trọng tâm tam giác ABC và $GA^2 = \dfrac{a^2}{3}$. Từ đó suy ra :

$$3GA^2 + 3GM^2 - 2\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}\right)\overrightarrow{GM} = 4a^2$$

$$\Leftrightarrow GM^2 = \frac{1}{3}\left(4a^2 - a^2\right) = a^2.$$

Vậy, tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính a. Chọn B

Câu 40. Xét điểm I thoả mãn :

$2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IB} \Leftrightarrow \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow I$ cố định.

Ta có : $2MB^2 - MC^2 = a^2 \Leftrightarrow 2\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right)^2 - \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}\right)^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 2IB^2 - IC^2 + 2\overrightarrow{MI}\underbrace{\left(2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC}\right)}_{\vec{0}} = a^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 + 2BC^2 - IC^2 = a^2$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = a^2 - 2a^2 + 4a^2 = 3a^2 \Leftrightarrow MI = a\sqrt{3}.$$

Tập hợp M là đường tròn tâm I bán kính $a\sqrt{3}$. Chọn D

Câu 41. Gọi O là trung điểm $AC \Rightarrow OA = OB = OC$. Ta có :

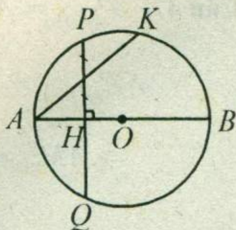
$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MC} = MB^2 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}\right)\left(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right) = \left(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}\right)^2$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{OB} = OB^2 - \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = OB^2 + OA^2 = 2\overrightarrow{OB}^2$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OB}\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow OB \perp BM$.

Suy ra, tập hợp M là đường thẳng $(\Delta) \perp OB$ tại B. Chọn C

Câu 42. Ta có : $PH^2 = HA.HB = \dfrac{3R^2}{4}$



Suy ra : $PI = \dfrac{a\sqrt{3}}{4}$, $IQ = \dfrac{3a\sqrt{3}}{4}$.

Vậy $\mathcal{P}_{I/(O)} = \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = -IP.IQ = -\dfrac{9R^2}{16}$.

Chọn A

Câu 43. $\mathcal{P}_{I/(O)} = \overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IK} = -\dfrac{9R^2}{16} \Rightarrow IK = \dfrac{9R^2}{16.IA}$.

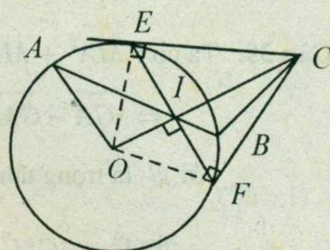
Mà $AI^2 = AH^2 + HI^2 = \dfrac{7a^2}{16} \Rightarrow IK = \dfrac{9R\sqrt{7}}{28}$. Chọn A

Câu 44. Tam giác vuông OEC cho :

$$IE^2 = OI.IC$$

$$\mathcal{P}_{I/(O)} = -IE^2 = \overrightarrow{IO}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}$$

$\Rightarrow$ Tam giác $OACB$ nội tiếp $\Rightarrow I, II, III$ đều đúng.



Chọn D

Câu 45. Đặt $IC = x; ID = y$ với $0 < y < x < 32$.

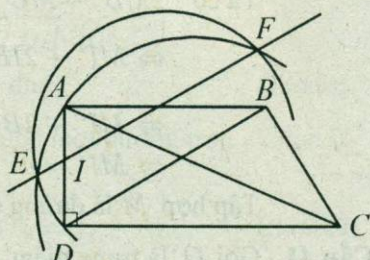
Dùng phương tích của I đối với đường tròn (O), ta có :

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ xy = 192 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} IC = 24 \\ ID = 8. \end{cases}$$ Chọn B

Câu 46. $\mathcal{P}_{I/(B,BD)} = \mathcal{P}_{I/(C,CA)}$ (1)

(vì EF là trục đẳng phương của hai đường tròn) $\Rightarrow$ I đúng.

$\mathcal{P}_{I/(B,BD)} = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF} \Rightarrow$ II đúng.



Từ (1) ta có :

$IC^2 - CA^2 = IB^2 - BD^2$

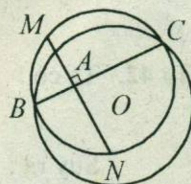
$\Leftrightarrow ID^2 + DC^2 - AD^2 - DC^2 = IA^2 + AB^2 - AD^2 - AB^2$

$\Leftrightarrow ID^2 = IA^2 \Rightarrow \overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{ID} \Rightarrow$ III. đúng.

$\Rightarrow$ I, II,III đều đúng. Chọn C

Câu 47. $\mathcal{P}_{A/(O)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = OA^2 - R^2 = -\dfrac{3}{4}R^2$

$\mathcal{P}_{A/(BC)} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = -AM^2 = -AN^2$



$\Rightarrow AM^2 = AN^2 = \dfrac{3}{4}R^2$

$\Rightarrow AM = AN = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$ Tập hợp M, N là đường tròn $\left(A, \dfrac{R\sqrt{3}}{2}\right)$.

Chọn B

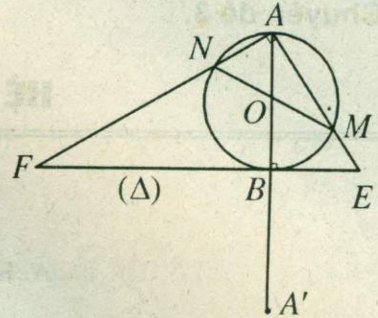
Câu 48. Tiếp tuyến chung trong (Δ_3) là trục đẳng phương của (O) và (O').

Chọn C

Câu 49. Gọi A' đối xứng với A qua $B \Rightarrow$ đường tròn (AEF) qua A'.

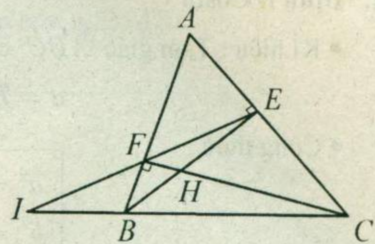
$$\mathcal{P}_{O/(AEF)} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OA'}$$
$$= -OA.OA'$$
$$= -R.3R$$
$$= -3R^2 \Rightarrow A \text{ sai.}$$

Chọn A



Câu 50. Tứ giác $BCEF$ nội tiếp
$\Rightarrow \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{IF}$
$\Rightarrow IB - IC = IE.IF$.

Chọn D



Chuyên đề 3.

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Định lí Côsin

- Kí hiệu : Tam giác ABC có ba góc A, B, C và ba cạnh

$$a = BC\ ;\ b = AC\ ;\ c = AB\ .$$

- Công thức :

$$\begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \end{cases} \quad \text{(I)}$$

II. Hệ quả

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \text{(II)}$$
$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

III. Định lí sin

- Kí hiệu : R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Công thức :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \quad \text{(III)}$$

IV. Độ dài đường trung tuyến

- Kí hiệu : m_a ; m_b ; m_c là độ dài các đường trung tuyến lần lượt vẽ từ các đỉnh A, B, C .

• Công thức :

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}$$
$$m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \qquad \text{(IV)}$$
$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

V. Diện tích tam giác

• Kí hiệu : + S là diện tích tam giác ABC ;
+ h_a, h_b, h_c là các đường cao vẽ từ các đỉnh A, B, C ;
+ $2p = a + b + c$ là chu vi tam giác ;
+ r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

• Công thức :

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$
$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B$$
$$S = \frac{abc}{4R} \qquad \text{(V)}$$
$$S = pr$$
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \text{ (Công thức Hê - rông)}$$

VI. Giải tam giác

• Giải tam giác là tính các cạnh và các góc của tam giác dựa trên một số điều kiện cho trước.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. TÍNH CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Phương pháp

Sử dụng các công thức ở năm bảng (I) đến (V) ở phần A có liên quan đến các điều kiện cho trước.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $a = \sqrt{6}$, $b = 2$, $c = \sqrt{3} + 1$. Tính :

a) Các góc của tam giác. b) h_a, R, r .

Giải

a) Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{4 + 4 + 2\sqrt{3} - 6}{2(2)(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$;

$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{6 + 4 + 2\sqrt{3} - 4}{2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 45^0$;

$\widehat{C} = 180^0 - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 75^0$.

b) Ta có : $S = \dfrac{1}{2} ah_a = \dfrac{1}{2} ac\sin B \Rightarrow h_a = c\sin B = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$;

$\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$;

$S = \dfrac{1}{2} bc\sin A = \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+1)$;

$r = \dfrac{S}{P} = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$.

Ví dụ 2. Tam giác ABC có $a = 6$; $c = 4$; $m_b = \sqrt{10}$. Tính b, S, m_a, m_c .

Giải

Ta có : $m_b^2 = \dfrac{a^2 + c^2}{2} - \dfrac{b^2}{4} \Rightarrow b^2 = 2(a^2 + c^2) - 4m_b^2 = 104 - 40 = 64$

$\Rightarrow b = 8$;

$m_a^2 = \dfrac{b^2 + c^2}{2} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{64 + 16}{2} - \dfrac{36}{4} = 31 \Rightarrow m_a = \sqrt{31}$;

$m_c^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} - \dfrac{c^2}{4} = \dfrac{36 + 64}{2} - \dfrac{16}{4} = 46 \Rightarrow m_c = \sqrt{46}$;

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{9(9-8)(9-6)(9-4)} = 3\sqrt{15}$.

Dạng 2. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC GIỮA CÁC YẾU TỐ TRONG TAM GIÁC

Phương pháp

• Sử dụng các công thức ở năm nhóm (I), (II), (III), (IV), (V) có liên quan đến các yếu tố trong hệ thức phải chứng minh.

Ví dụ 1. Chứng minh rằng với mọi tam giác ABC ta có :

a) $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{(a^2 + b^2 + c^2)R}{abc}$;

b) $S = \dfrac{1}{4}(a^2 \sin 2a + b^2 \sin 2A)$.

Giải

a) Ta có : $cotA = \dfrac{\cos A}{\sin B} = \dfrac{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\dfrac{a}{2R}} = R\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}$.

Tương tự : $cotB = R\dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{abc}$; $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} R$.

Do đó : $cotA + cotB + cotC = \dfrac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}$.

b) Ta có : $\dfrac{1}{4}(a^2 \sin 2B + b^2 \sin 2A) = \dfrac{1}{2}(a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A)$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 . \frac{b}{2R} . \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + b^2 \frac{a}{2R} . \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{ab}{4Rc}(a^2 + c^2 - b^2) + \frac{ab}{4Rc}(b^2 + c^2 - a^2)\right)$$

$$= \frac{ab}{8Rc}(2c^2) = \frac{abc}{4R} = S.$$

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O;R)$ sao cho $AH = R$ và $b^2 + c^2 = 2a^2$. Chứng minh :

a) $2\cot A = \cot B + \cot C$; b) $\sin B . \sin C = \dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Ta có : $\dfrac{b}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \dfrac{b}{2R}$. Do đó :

$$2 \sin B \sin C \cos A = 2\frac{b}{2R} . \frac{c}{2R} . \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4R^2} = \frac{a^2}{4R^2} = \sin^2 A \text{ (vì } b^2 + c^2 = 2a^2\text{)}.$$

Từ đó : $2\cot A = 2\dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{\sin A}{\sin B . \sin C} = \dfrac{\sin(B + C)}{\sin B . \sin C}$

$$= \frac{\sin B \cos C + \sin C \cos B}{\sin B \sin C} = \cot B + \cot C.$$

b) Ta có : $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}aR$ (vì $h_a = R$).

Lại có : $S = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow bc\sin A = aR \Leftrightarrow bc = \frac{aR}{\text{sinA}}$

mà $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow bc = 2R^2$. (1)

Mặt khác : $bc = 2R\sin B.2R\sin C = 4R^2 \sin B \sin C$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra : $\sin B \sin C = \frac{1}{2}$.

Dạng 3. NHẬN DẠNG TAM GIÁC

Phương pháp

- Từ giả thiết của bài toán, ta chứng minh tam giác có một góc đặc biệt, hoặc tam giác đó là tam giác đều, vuông hoặc cân.

Ví dụ 1. Tam giác ABC có các góc thỏa mãn :

$$4\sin^2 A - 4\sqrt{3}\sin A + 3\cot^2 B - 2\sqrt{3}\cot B + 4 = 0.$$

Tam giác ABC có tính chất gì ?

Giải

Hệ thức viết lại :

$$4\sin^2 A - 4\sqrt{3}\sin A + 3 + 3\cot^2 B - 2\sqrt{3}\cot B + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\sin A - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}\cot B - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin A - \sqrt{3} = 0 \\ \sqrt{3}\cot B - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cot B = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \widehat{A} = 60^0 \\ \widehat{B} = 60^0 \end{cases} \Rightarrow \widehat{C} = 60^0.$$

Vậy, tam giác ABC đều.

Ví dụ 2. Tam giác ABC có tính chất gì nếu ta có :

$$S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c) ?$$

Giải

Ta có : $S = \frac{1}{4}(a+b-c)(a-b+c)$

$$= \frac{1}{4}\left[a + (b-c)(a-(b-c))\right] = \frac{1}{4}\left[\text{a}^2 - (b-c)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[b^2 + c^2 - 2bc.\cos A - b^2 - c^2 + 2bc\right]$$

$$= \frac{1}{4}(2bc)(1 - \cos A) = \frac{1}{2}bc(1 - \cos A).$$

Mặt khác $S = \frac{1}{2}bc\sin A$ nên $1 - \cos A = \sin A \Rightarrow \widehat{A} = 90^0$.

Vậy, tam giác ABC vuông tại A.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tam giác ABC có $a = 13$; $b = 8$ và $c = 7$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A) $\widehat{A} = 120^0$.
B) $S = 10\sqrt{3}$.
C) $R = \frac{10\sqrt{3}}{3}$.
D) Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 2. Cho tam giác ABC có $a = 3$; $b = 4$; $c = 6$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A) $\widehat{A}$ là góc nhọn.
B) $\widehat{B}$ là góc tù.
C) $\widehat{C}$ là góc nhọn.
D) Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 3. Tam giác ABC có ba cạnh a, b, c thỏa $b^4 = a^4 + c^4$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A) $\widehat{A} < \widehat{B}$.
B) $\widehat{C} < \widehat{B}$.
C) $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ đều nhọn.
D) Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 4. Cho tam giác ABC có $a = 7$, $b = 8$, $c = 13$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A) $S = 12\sqrt{3}$.
B) $h_a = 4\sqrt{3}$.
C) $\sin A = -\frac{1}{2}$.
D) $r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 5. Cho tam giác ABC có $a = 2\sqrt{3}$; $b = 2\sqrt{2}$ và $c = \sqrt{6} - \sqrt{2}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A) $\widehat{B} = 120^0$.
B) $\widehat{C} = 60^0$.
C) $\widehat{B} = 45^0$.
D) $\widehat{A} = 15^0$.

Câu 6. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn có bán kính $R = \sqrt{6}$. Biết $\widehat{B} = 60^0$, $\widehat{C} = 45^0$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A) $b = 2\sqrt{3}$.
B) $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
C) $a = 3 + \sqrt{3}$.
D) $S = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.

Câu 7. Cho tam giác ABC cân tại A, có $\widehat{B} = 30^0$ và $BC = \sqrt{3}$. Kết luận nào sau đây đúng ?

A) $b = c = \frac{1}{2}$. B) $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C) $R = \sqrt{2}$. D) $R = 1$.

Câu 8. Tam giác ABC cân tại A có $\widehat{B} = 30^0$ và $BC = \sqrt{3}$. Tính $(m_a + m_b)(m_a - m_b)$ ta được :

A) 1. B) $\frac{1}{2}$. C) $\frac{3}{2}$. D) $-\frac{3}{2}$.

Câu 9. Tam giác ABC có $a > 5$, $b = 4$; $c = 3$ và $S = 3\sqrt{3}$. Số đo của góc A là :

A) 120^0. B) 60^0. C) 30^0. D) 45^0.

Câu 10. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 3\widehat{C}$; $\widehat{B} = 2\widehat{C}$ và chu vi $2p = 3 + \sqrt{3}$. Độ dài ba cạnh của tam giác là :

A) $a = \sqrt{3}$; $c = 1$; $b = 2$. B) $a = 2$; $b = \sqrt{3}$; $c = 1$.

C) $a = 1$; $b = 2$; $c = \sqrt{3}$. D) $a = \sqrt{3}$; $b = 1$; $c = 2$.

Câu 11. Tam giác ABC có $C = 13$; $\widehat{C} = 120^0$, $a + b = 15\,(a > b)$. Kết quả nào sau đây đúng ?

A) $b = 7$. B) $a = 8$.

C) $r = \sqrt{3}$. D) Cả ba câu trên đều đúng.

Câu 12. Tam giác ABC có hai trung tuyến $BM = 6$, $CN = 9$ tạo với nhau một góc 120^0. Các cạnh của tam giác có độ dài là :

A) $2\sqrt{7}$; $3\sqrt{13}$; $4\sqrt{19}$. B) $4\sqrt{13}$; $2\sqrt{7}$; $3\sqrt{19}$.

C) $2\sqrt{19}$; $4\sqrt{7}$; $2\sqrt{13}$. D) kết quả khác.

Câu 13. Cho tam giác ABC, chọn hệ thức đúng.

A) $\cot A = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} R$.

B) $\cot B = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{abc} R$.

C) $\cot C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} R$.

D) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

Câu 14. Tam giác ABC có diện tích S. Chọn kết quả đúng.

A) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin B + b^2 \cos A)$.

B) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin A \cos B + b^2 \sin B \cos A)$.

C) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin B \cos B + b^2 \sin A \cos A)$.

D) $S = \frac{1}{4}(a^2 \sin A + b^2 \sin B)$.

Câu 15. Tam giác ABC có diện tích S. Chọn kết quả đúng.

A) $S = R^2 \sin A \sin B \sin C$.
B) $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$.
C) $S = 2R^2 \cos A \cos B \cos C$.
D) $S = 4R^2 \sin A \sin B \sin C$.

Câu 16. Tam giác ABC có $2a = b + c$. Xét hai hệ thức :

I. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$;
II. $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$.

Hệ thức nào đúng ?

A) I và II đúng.
B) Chỉ I.
C) Chỉ II.
D) I và II đều sai.

Câu 17. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 120^0$, đường phân giác trong $AD = m$. Tìm hệ thức đúng.

A) $b + c = 2m$.
B) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{2}{m}$.
C) $b + c = \frac{3}{2}m$.
D) $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{m}$.

Câu 18. Tam giác ABC có $a^2 = b.c$. Tìm hệ thức đúng.

A) $\sin^2 A = \sin B.\sin C$.
B) $\sin A = \sin B + \sin C$.
C) $\sin^2 A = \sin^2 B \sin^2 C$.
D) $\sin A + \sin B + \sin C = 0$.

Câu 19. Tam giác ABC có $bc = a^2$. Tìm hệ thức đúng.

A) $h_b + h_c = 2h_a$.
B) $h_a^2 = h_b^2 + h_c^2$.
C) $h_b.h_c = h_a^2$.
D) $h_a = h_b + h_c$.

Câu 20. Cho tam giác ABC. Kết quả nào sau đây sai ?

A) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$.

B) $\cos C = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ac}$.

C) $\cos A = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

D) $a = 2R\sin A$.

Câu 21. Cho tam giác ABC, kết quả nào sau đây sai ?

A) $S = \dfrac{abc}{2R}$.
B) $S = pr$.
C) $S = \dfrac{1}{2}ac\sin B$.
D) $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Câu 22. Cho tam giác ABC, câu nào sau đây sai ?

A) $ah_a = bh_b = ch_c$.
B) $2\sin A = \dfrac{a}{R}$.
C) $a^2 = bc \Rightarrow \cos^2 A = \cos B.\cos C$.
D) $a = b + c \Rightarrow \sin A = \sin B + \sin C$.

Câu 23. Tam giác ABC có $\widehat{A} = 45^0$. Chọn phát biểu đúng.

A) $a = R\sqrt{3}$.
B) $S = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
C) $a^2 + b^2 = 4S + 2R^2$.
D) Ba câu trên đều đúng.

Câu 24. Tam giác ABC có $a = 13$, $b = 8$, $c = 7$. Kết quả nào sai ?

A) $S = 14\sqrt{3}$.
B) $\vec{a}.\vec{b} = -28$.
C) $\widehat{A}$ tù.
D) $\widehat{A} = 135^0$.

Câu 25. Hình bình hành $ABCD$ có hai đường chéo $AC = 6a$; $BD = 4a$ và tạo thành góc 120^0. Diện tích hình bình hành bằng :

A) $6a^2\sqrt{3}$.
B) $4a^2\sqrt{3}$.
C) $2a^2\sqrt{3}$.
D) $a^2\sqrt{3}$.

Câu 26. Tam giác ABC có ba cạnh thỏa $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} = 1 + \dfrac{c^2}{ab}$. Số đo của góc C là :

A) 60^0.
B) 30^0.
C) 45^0.
D) 90^0.

Câu 27. Các cạnh của tam giác ABC thỏa $\dfrac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2$. Số đo của góc B là :

A) 45^0.
B) 60^0.
C) 90^0.
D) 30^0.

Câu 28. Tam giác ABC có ba cạnh là $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$. Tích Rr có giá trị là :

A) 3.
B) 4.
C) 5.
D) đáp số khác.

Câu 29. Tam giác ABC có chu vi bằng 15 và nội tiếp đường tròn có bán kính $R = 5$. Biểu thức $\sin A + \sin B + \sin C$ có giá trị là :

A) 3.
B) $\dfrac{5}{2}$.
C) $\dfrac{3}{2}$.
D) 1.

Câu 30. Tam giác ABC có $a = 8$; $b = 6$; $c = 4$. Độ dài trung tuyến BM là :

A) $\sqrt{10}$.
B) $\sqrt{46}$.
C) $\sqrt{31}$.
D) đáp số khác.

Câu 31. Hình bình hành $ABCD$ có $AB = \sqrt{5}$, $AD = \sqrt{3}$. Độ dài của $AC^2 + BD^2$ là :

A) 10. B) $2\sqrt{10}$. C) 8. D) 16.

Câu 32. Tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, AC = 5$. D và E là hai điểm trên cạnh BC thỏa $BD = DE = EC$. Giá trị của $AD^2 + AE^2$ là :

A) 10. B) 15. C) 5. D) 25.

Câu 33. Tam giác ABC có $AB = 4$, $BC = 7$, $AC = 5$. Gọi G là trọng tâm của tam giác. Độ dài AG bằng :

A) $\sqrt{\frac{11}{3}}$. B) $\sqrt{\frac{10}{3}}$. C) $\sqrt{2}$. D) $\sqrt{10}$.

Câu 34. Cho tam giác ABC. Tìm hệ thức đúng.

A) $b^2 - c^2 = a(b\cos C + c\cos B)$

B) $b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B)$.

C) $b^2 - c^2 = a(b\cos B - c\cos C)$.

D) $b^2 - c^2 = a(b\cos B + c\cos C)$.

Câu 35. Cho tam giác ABC. Tìm hệ thức đúng.

A) $a\cos A + b\cos B = c$. B) $a\cos B + b\cos A = c$.

C) $a\cos B - b\cos A = c$. D) $a\cos A - b\cos B = c$.

Câu 36. Tam giác ABC có $BC = 12$; $AC = 11$. Trung tuyến $AM = 8$. Diện tích tam giác bằng :

A) $\frac{15\sqrt{39}}{2}$. B) $\frac{13\sqrt{39}}{2}$. C) $\frac{13\sqrt{39}}{3}$. D) đáp số khác.

Câu 37. Tam giác ABC có $\frac{a}{b} = \frac{m_b}{m_a} \neq 1$. Tìm hệ thức đúng.

A) $b^2 + c^2 = 2a^2$. B) $a^2 + c^2 = 2b^2$.

C) $a^2 + b^2 = 2c^2$. D) $2a^2 + b^2 = c^2$.

Câu 38. Tam giác ABC thỏa $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$. Hệ thức nào sau đây đúng ?

A) $b^2 + c^2 = 5a^2$. B) $b^2 + c^2 = 3a^2$.

C) $a^2 + c^2 = 5b^2$. D) $a^2 + c^2 = 3b^2$.

Câu 39. Tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến là 15, 18, 21. Diện tích của tam giác bằng :

A) $24\sqrt{6}$. B) $32\sqrt{6}$. C) $72\sqrt{6}$. D) đáp số khác.

Câu 40. Tam giác ABC có trọng tâm G thỏa mãn $GB \perp GC$. Tìm hệ thức đúng.

A) $b^2 + c^2 = 2a^2$. B) $b^2 + c^2 = 3a^2$.

C) $b^2 + c^2 = 4a^2$. D) $b^2 + c^2 = 5a^2$.

Câu 41. Tam giác ABC có các cạnh thỏa mãn : $\begin{cases} \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{b^2}{ac} \\ \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \end{cases}$ là tam giác

A) tam giác vuông. B) tam giác cân.

C) tam giác đều. D) tam giác vuông cân.

Câu 42. Tam giác ABC là tam giác gì nếu ta có :

$$S = \frac{1}{4}(a + b - c)(a - b + c)?$$

A) vuông tại A. B) vuông tại B.

C) Tam giác đều. D) vuông cân tại A.

Câu 43. Tam giác ABC có tính chất đặc biệt gì nếu thỏa mãn $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$?

A) Tam giác đều. B) Vuông tại A. C) $\widehat{B} = 60^0$. D) $\widehat{A} = 60^0$.

Câu 44. Tam giác ABC thỏa $\begin{cases} a = 2b\cos C \\ \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2 \end{cases}$ là tam giác có tính chất gì ?

A) Cân tại A. B) $\widehat{A} = 60^0$.

C) Vuông tại A. D) Tam giác đều.

Câu 45. Tam giác ABC có $a = 35$; $\widehat{B} = 40^0$; $\widehat{A} = 120^0$. Số đo của góc và các cạnh còn lại của tam giác là :

A) $b \approx 25,0$; $c \approx 13,5,$; $\widehat{C} = 20^0$.

B) $\widehat{C} = 20^0$; $b \approx 26,0$; $c \approx 13,8$.

C) $b \approx 26,5$; $c \approx 13,0$; $\widehat{C} = 20^0$.

D) $\widehat{C} = 20^0$; $c \approx 14,0$; $b \approx 27$.

Câu 46. Tam giác ABC có $a = 7$; $b = 23$ và $\widehat{C} = 130^0$. Giá trị của cạnh và các góc còn lại là :

A) $\widehat{A} \approx 11^0$; $\widehat{B} \approx 39^0$; $c \approx 28,0$.

B) $\widehat{A} \approx 10^0$; $\widehat{B} \approx 40^0$; $c \approx 27,5$.

C) $\widehat{A} \approx 12^0$; $\widehat{B} \approx 38^0$; $c \approx 26,0$.

D) $\widehat{A} \approx 9^0$; $\widehat{B} \approx 41^0$; $c \approx 25,0$.

Câu 47. Tìm số đo các góc của tam giác ABC biết tam giác có $a = 4$; $b = 5$ và $c = 7$.

A) $\widehat{A} \approx 34^0$ $\widehat{B} \approx 44^0$ $\widehat{C} \approx 102^0$

B) $\widehat{A} \approx 35^0$ $\widehat{B} \approx 45^0$ $\widehat{C} \approx 100^0$

C) $\widehat{A} \approx 32^0$ $\widehat{B} \approx 46^0$ $\widehat{C} \approx 102^0$

D) $\widehat{A} \approx 36^0$ $\widehat{B} \approx 44^0$ $\widehat{C} \approx 100^0$

Câu 48. Tam giác ABC có tính chất gì, nếu ta có $\sin A = 2\sin B \cos C$?

A) Tam giác đều.

B) Tam giác vuông.

C) Tam giác cân tại A .

D) Tam giác cân tại B .

Câu 49. Cho tứ giác $ABCD$. Tập hợp các điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k$ $(k > 0)$ là :

A) đường trung trực của AB .

B) đường tròn.

C) đường thẳng qua D và vuông góc BC .

D) tập hợp khác.

Câu 50. Cho tam giác ABC đều cạnh a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3a^2}{2}$$ là :

A) đường tròn bán kính a .

B) đường tròn bán kính $\frac{3a}{2}$.

C) đường tròn bán kính $\frac{a}{2}$.

D) đường tròn bán kính $\frac{a}{4}$.

ĐÁP ÁN

1. A	2. A	3. D	4. B	5. C
6. C	7. D	8. D	9. A	10. B
11. D	12. C	13. D	14. C	15. B
16. A	17. D	18. A	19. C	20. B
21. A	22. C	23. B	24. D	25. A
26. A	27. B	28. B	29. C	30. C
31. D	32. D	33. A	34. B	35. B
36. A	37. C	38. A	39. C	40. D
41. C	42. A	43. B	44. D	45. B
46. A	47. A	48. C	49. B	50. D

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 120^0$. Chọn A

Câu 2. Ta có : $\cos A > 0$ vì $b^2 + c^2 - a^2 = 43 > 0 \Rightarrow \widehat{A}$ nhọn.

$\cos B > 0$ vì $a^2 + c^2 - b^2 = 29 > 0 \Rightarrow \widehat{B}$ nhọn $\Rightarrow$ B sai. Chọn A

Câu 3. Ta có : $b^4 = a^4 + c^4 \Rightarrow a < b \Rightarrow \widehat{A} < \widehat{B}$; $c < b \Rightarrow \widehat{C} < \widehat{B}$.

$$b^4 = a^4 + c^4 = (a^2 + c^2)^2 - 2a^2c^2 < (a^2 + c^2)^2 \Rightarrow b^2 < a^2 + c^2$$

$\Rightarrow \cos B > 0 \Rightarrow \widehat{B}$ nhọn $\Rightarrow \widehat{A}$ và $\widehat{C}$ nhọn.

Vậy A, B, C đều đúng. Chọn D

Câu 4. Ta có : $S = \sqrt{14(14-13)(14-8)(14-7)} = 14\sqrt{3}$

$\Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a} = \dfrac{28\sqrt{3}}{7} = 4\sqrt{3} \Rightarrow B$ đúng. Chọn B

Câu 5. Ta có : $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{12 + (\sqrt{6} - \sqrt{2})^2 - 8}{2(2\sqrt{3})(\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{B} = 45^0$. Chọn C

Câu 6. Ta có : $b = 2R\sin B = 3\sqrt{2}$ và $c = 2R\sin C = 2\sqrt{3}$;

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \Rightarrow a^2 - 2\sqrt{3}a - 6 = 0$;

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{3} - 3 \text{ (loại)} \\ a = \sqrt{3} + 3 \Rightarrow C \text{ đúng.} \end{array}\right.$ Chọn C

Câu 7. Ta có : $b = c \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = c = 1$;

$$S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\sin 120^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Suy ra $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow D$ đúng. Chọn D

Câu 8. Ta có : $(m_a + m_b)(m_a - m_b) = m_a^2 - m_b^2 = \dfrac{3(b^2 - a^2)}{4}$

$= \dfrac{3(1-3)}{4} = -\dfrac{3}{2}$. Chọn D

Câu 9. Ta có : $S = \frac{1}{2}bc\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{bc} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\widehat{A} = 60^0 \\ \widehat{A} = 120^0,\end{array}\right.$

$$a > 5 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A > 25$$

$$\Rightarrow \cos A < \frac{b^2 + c^2 - 25}{2bc} = 0 \Rightarrow \widehat{A} = 120^0.$$ Chọn A

Câu 10. Ta có : $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^0 \Rightarrow 6\widehat{C} = 180^0 \Leftrightarrow \widehat{C} = 30^0$

$$\Rightarrow \widehat{A} = 90^0 ; \widehat{B} = 60^0.$$

$$\frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{a}{\sin C} = \frac{2P}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2$$

$$\Rightarrow a = 2\sin 90^0 = 2 ; b = 2\sin 60^0 = \sqrt{3} ; c = 1.$$ Chọn B

Câu 11. Ta có : $(a+b)^2 = 15^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 225,$ (1)

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \Rightarrow a^2 + b^2 + ba = 169.$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow ab = 56$ mà $a + b = 15 \Rightarrow a = 8,\ b = 7$ (vì $a > b$).

Do đó : $S = \frac{1}{2}ab\sin C = pr \Rightarrow r = \sqrt{3} \Rightarrow A, B, C$ đều đúng. Chọn D

Câu 12. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có :

$a^2 = GB^2 + GC^2 - 2GB.GC\cos 120^0 = 76 \Rightarrow a = 2\sqrt{19}$. Ngoài ra :

$$\begin{cases} m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 36 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 81 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c^2 - b^2 = -8 \\ 2b^2 - c^2 = 172 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4\sqrt{7} \\ c = 2\sqrt{13}. \end{cases}$$ Chọn C

Câu 13. Ta có : $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}}{\frac{a}{2R}} = \frac{R(b^2 + c^2 - a^2)}{2abc}.$

Tương tự : $\cot B = \frac{R(a^2 + c^2 - b^2)}{abc}$; $\cot C = \frac{R(a^2 + b^2 - c^2)}{abc}.$

$$\Rightarrow \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$ Chọn D

Câu 14. Ta có : $S = \frac{abc}{4R} = \frac{ab(2c^2)}{8Rc}$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{ab}{4Rc}(a^2 + c^2 - b^2) + \frac{ab}{4Rc}(b^2 + c^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[a^2.\frac{b}{2R}\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)+b^2\frac{a}{2R}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}(a^2\sin B\cos B + b^2\sin A\cos A).$$ Chọn C

Câu 15. Ta có : $S = \frac{abc}{4R} = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R} = 2R^2\sin A\sin B\sin C$.

Chọn B

Câu 16. Ta có : $2a = b + c \Rightarrow 2.2R\sin A = 2R\sin B + 2R\sin C$

$\Rightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C \Rightarrow I$ đúng.

Ta có : $S = \frac{1}{2}ah_a \Leftrightarrow a = \frac{2S}{h_a}$, tương tự $b = \frac{2s}{h_b}$; $c = \frac{2S}{h_c}$.

Do đó : $2a = b + c \Rightarrow \frac{2}{h_a} = \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} \Rightarrow II$ đúng. Chọn A

Câu 17. Ta có : $dt(ABC) = dt(ABD) + dt(ACD)$

$\Rightarrow \frac{1}{2}bc\sin 120^0 = \frac{1}{2}cm\sin 60^0 + \frac{1}{2}bm\sin 60^0$

$\Leftrightarrow bc = cm + bm$ (vì $\sin 120^0 = \sin 60^0$) $\Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$. Chọn D

Câu 18. Từ $a^2 = bc \Rightarrow (2R\sin A)^2 = 2R\sin B.2R\sin C$

$\Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B\sin C$. Chọn A

Câu 19. Ta có : $a^2 = bc \Rightarrow \left(\frac{2S}{h_a}\right)^2 = \frac{2S}{h_b}\cdot\frac{2S}{h_c} \Leftrightarrow \frac{1}{h_a^2} = \frac{1}{h_b}\cdot\frac{1}{h_c} \Rightarrow h_a^2 = h_b.h_c$.

Chọn C

Câu 20. Ta có : $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Rightarrow B$ sai. Chọn B

Câu 21. Ta có : $S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow A$ sai. Chọn A

Câu 22. Ta có : $a^2 = b.c \Leftrightarrow \sin^2 A = \sin B.\sin C \Rightarrow C$ sai. Chọn C

Câu 23. Ta có : $S = \frac{1}{2}AC\sin A = \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2}AB.AC$,

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}AB.AC$

$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} \Rightarrow B$ đúng.

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

$\widehat{A} = 45^0 \Rightarrow \widehat{BOC} = 90^0 \Rightarrow a = R\sqrt{2} \Rightarrow$ A sai. Chọn B

Câu 24. Ta có : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{64 + 49 - 169}{2.56} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 120^0$.

Chọn D

Câu 25. Gọi O là tâm hình bình hành.

$\Rightarrow dt(OAB) = \frac{1}{2}OA.OB\sin 120^0 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$

$dt(ABCD) = 4dt(OAB) = 6a^2\sqrt{3}$. Chọn A

Câu 26. Ta có : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{c^2}{ab} \Rightarrow a^2 + b^2 - c^2 = ab$.

Do đó : $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} = 60^0$. Chọn A

Câu 27. Ta có : $\frac{a^3 + c^3 - b^3}{a + c - b} = b^2 \Leftrightarrow a^3 + c^3 = b^2(a + c) \Leftrightarrow a^2 + c^2 - ac = b^2$

$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$

Do đó : $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^0$. Chọn B

Câu 28. Ta có : $S = \frac{abc}{4R} = pr \Rightarrow Rr = \frac{abc}{4p} = \frac{4.5.6}{2.15} = 4$. Chọn B

Câu 29. Ta có : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{2p}{\sin A + \sin B + \sin C} = 2R$

$\Rightarrow \sin A + \sin B + \sin C = \frac{P}{R} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$. Chọn C

Câu 30. Ta có : $m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = \frac{64 + 16}{2} - \frac{36}{4} = 31 \Rightarrow m_b = \sqrt{31}$.

Chọn C

Câu 31. Gọi O là tâm hình bình hành. Ta có :

$AB^2 + AO^2 = 2AO^2 + \frac{BD^2}{2}$

$\Leftrightarrow 5 + 3 = \frac{4AO^2 + BD^2}{2} \Leftrightarrow AC^2 + BD^2 = 16$. Chọn D

Câu 32. Đặt $AD = x$; $AE = y$. Tam giác ABE cho :

$$AB^2 + AE^2 = 2AD^2 + \frac{BE^2}{2} \Leftrightarrow 16 + y^2 = 2x^2 + 8 \quad (1)$$

Tương tự : $AC^2 + AD^2 = 2AE^2 + \frac{CD^2}{2} \Leftrightarrow 25 + x^2 = 2y^2 + 8 \quad (2)$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \begin{cases} 2x^2 - y^2 = 8 \\ -x^2 + 2y^2 = 17 \end{cases} \Rightarrow 3y^2 = 42 \Leftrightarrow y^2 = 14 \Rightarrow x^2 = 11$.

Vậy $AD^2 + AE^2 = x^2 + y^2 = 25$. Chọn D

Câu 33. Ta có : $AM^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{25 + 16}{2} - \frac{49}{4} = \frac{33}{4}$

$$\Rightarrow AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{33}}{2} = \frac{\sqrt{33}}{3} = \sqrt{\frac{11}{3}}.$$ Chọn A

Câu 34. Ta có : $b^2 - c^2 = (a^2 + c^2 - 2ac\cos B) - (a^2 + b^2 - 2ab\cos C)$

$$= c^2 - b^2 + 2a(b\cos C - c\cos B)$$

$$\Leftrightarrow 2(b^2 - c^2) = 2a(b\cos C - c\cos B)$$

$$\Leftrightarrow b^2 - c^2 = a(b\cos C - c\cos B).$$ Chọn B

Câu 35. $a\cos B + b\cos A = a\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right) + b\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) = c$. Chọn B

Câu 36. Ta có : $dt(AMC) = \sqrt{\frac{25}{2}\left(\frac{25}{2} - 11\right)\left(\frac{25}{2} - 8\right)\left(\frac{25}{2} - 6\right)} = \frac{15}{4}\sqrt{39}$,

$$dt(ABC) = 2dt(AMC) = \frac{15}{2}\sqrt{39}.$$ Chọn A

Câu 37. $\frac{a}{b} = \frac{m_b}{m_a} \Leftrightarrow a^2m_a^2 = b^2m_b^2 \Leftrightarrow a^2\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = b^2\left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow a^4 - b^4 = 2c^2(a^2 - b^2) \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2c^2.$$ Chọn C

Câu 38. Với $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc}R$, tương tự cho $\cot B$ và $\cot C$.

Từ $\cot A = 2(\cot B + \cot C)$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} = 2\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc}\right) \Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2.$$

Chọn A

Câu 39. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC và D là điểm đối xứng của A qua G, M là trung điểm BC; $BG = 12$; $GA = GD = 10$; $BD = GC = 14$.

Do $AM = 3GM \Rightarrow dt(ABC) = 3dt(GBC)$

$$dt\,(GBC) = dt(GBD)\left(= \frac{1}{2}dt(BDCG)\right)$$

$$= \sqrt{18(18-14)(18-12)(18-10)} = 24\sqrt{6}$$

$\Rightarrow dt(ABC) = 72\sqrt{6}$. Chọn C

Câu 40. Ta có : $GB \perp \mathrm{GC} \Leftrightarrow \mathrm{BC}^2 = GB^2 + GC^2 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4}{9}(m_b^2 + m_c^2)$

$\Leftrightarrow 9a^2 = 4\left(\frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4}\right) \Leftrightarrow 5a^2 = b^2 + c^2$. Chọn D

Câu 41. Ta có : $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} = 1 + \frac{b^2}{ac} \Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = ac$

$\Rightarrow \cos B = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{B} = 60^0$;

$\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = bc \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$.

Vậy, tam giác ABC đều. Chọn C

Câu 42. Với $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\Rightarrow 4S = \sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)}$

So với giả thiết $4S = (a+b-c)(a-b+c)$ ta được :

$(a+b-c)(a-b+c) = (a+b+c)(b+c-a)$

$\Leftrightarrow a^2 - (b-c)^2 = (b+c)^2 - a^2 \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$

$\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại A. Chọn A

Câu 43. Ta có : $m_b^2 + m_c^2 = 5m_a^2$

$\Leftrightarrow \frac{a^2+c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2+b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 5\left(\frac{b^2+c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)$

$\Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow$ tam giác ABC vuông tại A. Chọn B

Câu 44. Ta có : $\frac{b^3+c^3-a^3}{b+c-a} = a^2 \Rightarrow \cos A = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{A} = 60^0$,

$a = 2b\cos C = 2b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c$.

$\Rightarrow$ tam giác ABC cân có $\widehat{A} = 60^0$ nên đều. Chọn D

Câu 45. Ta có : $\widehat{A} = \widehat{C} = 20^0$; $b \approx 26$; $c \approx 13,8$. Chọn B

Câu 46. Ta có : $\widehat{A} \approx 11^0$; $\widehat{B} \approx 39^0$; $c \approx 28,0$. Chọn A

Câu 47. Ta có : $\widehat{A} \approx 34^0$; $\widehat{B} \approx 44^0$; $\widehat{C} \approx 102^0$. Chọn A

Câu 48. Ta có : $\sin A = 2\sin B\cos C \Rightarrow 2R\sin A = 2.2R\sin B\cos C$

$$\Leftrightarrow a = 2b\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right) \Leftrightarrow b = c$$

$\Rightarrow$ tam giác ABC cân tại A. Chọn C

Câu 49. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD. G la trung điểm IJ.

Ta có : $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$

$$= 2MI^2 + \frac{AB^2}{2} + 2MJ^2 + \frac{CD^2}{2}$$

$$= 2\left(MI^2 + MJ^2\right) + \frac{AB^2 + CD^2}{2}$$

$$= 2\left(2MG^2 + \frac{IJ^2}{2}\right) + \frac{AB^2 + CD^2}{2} = k$$

$$\Leftrightarrow 4MG^2 = k - \left(\frac{AB^2 + CD^2}{2} + IJ^2\right)$$: không đổi.

$\Rightarrow$ Tập hợp M là đường tròn tâm G. Chọn B

Câu 50. Gọi H là trung điểm BC và O là trung điểm AH. Ta có :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow 2MA^2 + 2MH^2 + \frac{BC^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\left(2MO^2 + \frac{AH^2}{2}\right) + \frac{BC^2}{2} = \frac{3a^2}{2} \Leftrightarrow MO^2 = \frac{a^2}{16} \Leftrightarrow MO = \frac{a}{4}.$$

Vậy, tập hợp M la đường tròn tâm O bán kính $\frac{a}{4}$. Chọn D

Chuyên đề 4.

TRỤC TỌA ĐỘ. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Trục tọa độ

1. Định nghĩa

- Trục tọa độ (hay trục, hay trục số) là đường thẳng trên đó đã xác định điểm O và vectơ $\vec{i}$ sao cho $|\vec{i}| = 1$. Kí hiệu là $(O;\ \vec{i})$.
- O là gốc tọa độ, $\vec{i}$ là vectơ đơn vị.

2. Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục

- Vectơ $\vec{a}$ nằm trên trục $(O;\ \vec{i})$. Số a được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ đối với trục $(O;\ \vec{i})$ nếu $\vec{a} = a\vec{i}$.
- Điểm M nằm trên trục $(O;\ \vec{i})$. Số x được gọi là tọa độ của điểm M đối với trục $(O;\ \vec{i})$ nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i}$.

Chú ý. x cũng là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$.

- Độ dài đại số của vectơ trên trục. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có độ dài đại số là $\overline{AB}$ nếu $\overrightarrow{AB} = \overline{AB}\vec{i}$. ($\overline{AB}$ là tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$).

II. Hệ trục tọa độ

1. Định nghĩa

- Hệ trục tọa độ Oxy hay $(0\ ;\ \vec{i},\ \vec{y})$ là hệ trục tọa độ vuông góc Ox, Oy;
- Trục Ox có vectơ đơn vị $\vec{i}$, trục Oy có vectơ đơn vị $\vec{j}$;
- Mặt phẳng tọa độ Oxy là mặt phẳng đã cho một hệ trục tọa độ Oxy.

2. Tọa độ của vectơ đối với hệ trục tọa độ

- Đối với hệ trục tọa độ $(O\ ;\ \vec{i},\ \vec{j})$, nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} \Leftrightarrow \vec{a} = (a_1\ ;\ a_2)$;
- a_1 gọi là hoành độ, a_2 gọi là tung độ của $\vec{a}$.

3. Tọa độ hai vectơ bằng nhau

Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$; $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$. Ta có :

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases} \quad \text{(I)}$$

III. Biểu thức tọa độ của các phép tính vectơ

*** Biểu thức tọa độ của phép cộng, phép trừ và phép nhân với một số của vectơ.**

* Công thức :

Cho $\vec{a} = (a_1 ; a_2)$; $\vec{b} = (b_1 ; b_2)$, $k \neq 0$, $k \in R$

- $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1 ; \ a_2 + b_2)$
- $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1 ; \ a_2 - b_2)$ (II)
- $k\vec{a} = (ka_1 ; ka_2)$

* Hệ quả :

- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b} \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0$ (III)
- $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

IV. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng hai vectơ

* Công thức :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 \quad \text{(IV)}$$

* Hệ quả :

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}} \quad \text{(V)}$$

V. Tọa độ của điểm

1. Định nghĩa

Điểm M trong mặt phẳng tọa độ $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. Cặp số $(x ; y)$ gọi là tọa độ điểm M, kí hiệu $M(x ; y)$ nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Vậy $M(x\,;\,y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

Chú ý. $(x\,;\,y)$ cũng là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

2. Hệ quả

• Tọa độ vectơ theo tọa độ điểm đầu và điểm cuối. Cho $A(x_A\,;\,y_A)$ và $B(x_B\,;\,y_B)$, ta có :

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\, y_B - y_A) \qquad \text{(VI)}$$

• Khoảng cách giữa hai điểm A, B.

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad \text{(VII)}$$

Chú ý. Công thức VII cũng là độ dài vectơ $\overrightarrow{AB}$.

VI. Tọa độ trung điểm và tọa độ trọng tâm của tam giác

1. Tọa độ trung điểm

• Nếu $M(x_M\,;\,y_M)$ là trung điểm đoạn thẳng AB, ta có :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \qquad \text{(VIII)}$$

2. Tọa độ trọng tâm

• Nếu $G(x_G\,;y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC, ta có :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \qquad \text{(IX)}$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. XÁC ĐỊNH ĐIỂM

Phương pháp

Xác định điểm $M(x\,;y)$ là tìm tọa độ $(x\,;y)$ bằng hệ phương trình chứa x và y dựa vào điều kiện bài toán.

Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(5;-8)$, $B(-3;-2)$, $C(11;0)$. Tìm các điểm :

a) D để $ABDC$ là hình thang cân ;

b) E để tam giác ABE có trọng tâm là C ;

c) Chân đường cao AH.

Giải

a) $ABDC$ là hình thang cân $\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương } \overrightarrow{CD} \\ |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|. \end{cases}$ (1)

Gọi $D(x;y)$ ta có : $\overrightarrow{CD} = (x-11;y)$; $\overrightarrow{BD} = (x+3;y+2)$

$\overrightarrow{AB} = (-8;6)$; $\overrightarrow{AC} = (6;8)$. Từ đó :

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-11)+8y=0 \\ (x+3)^2+(y+2)=6^2+8^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+4y=33 \\ (x+3)^2+(y+2)^2=100 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=6. \end{cases} \text{ Vậy } D(3;6).$$

b) Gọi $E(x;y)$. C là trọng tâm tam giác ABE nên :

$$\begin{cases} x_C = \frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C) \\ y_C = \frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11\times 3 = 5-3+x \\ 0=-8-2+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=31 \\ y=10. \end{cases}$$

Vậy $E(31;10)$.

C) Gọi $H(x;y)$ là chân đường cao AH, ta có :

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{BH} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7(x-5)+(y+8)=0 \\ (x+3)-7(y+2)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x+y=27 \\ x-7y=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-1. \end{cases} \text{ Vậy } H(4;-1).$$

Chú ý. Vẽ các điểm A, B, C trong mặt phẳng tọa độ Oxy ta thấy ABC là tam giác vuông cân tại A từ đó suy ra kết quả của D và H dễ dàng.

Ví dụ 2. Cho tam giác ABC có $A(A;3)$, $B(0;-5)$, $C(-6;-2)$. Tìm tâm I và J lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.

Giải

Dễ dàng kiểm nhận tam giác ABC vuông tại B nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp là trung điểm AC. Do đó $I\left(-1;\frac{1}{2}\right)$.

Gọi $J(x;y)$ là tâm đường tròn nội tiếp.

- BE là phân giác trong góc B, nên ta có :

$$\frac{\overrightarrow{EA}}{\overrightarrow{EC}}=-\frac{BA}{BC}=-\frac{4}{3}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{EA}+4\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Rightarrow E\left(-\frac{12}{7};\frac{1}{7}\right).$$

- CF là phân giác trong góc C, nên ta có :

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{FB}}=-\frac{CA}{CB}=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{FA}+5\overrightarrow{FB}=\vec{0}\Rightarrow F\left(\frac{3}{2};-2\right).$$

J là giao điểm của BE và CF nên $\begin{cases}\overrightarrow{BJ}\text{ cùng phương }\overrightarrow{BE}\\ \overrightarrow{CJ}\text{ cùng phương }\overrightarrow{CF}.\end{cases}$

Suy ra $J(-1;-2)$.

Dạng 2. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT CỦA MỘT HÌNH

Phương pháp

- Dựa vào yêu cầu phải chứng minh một hình ta tìm mối quan hệ tính chất của hình với hệ thức vectơ. Xong áp dụng biểu thức tọa độ các phép tính vectơ để kết luận.

Ví dụ 1. Tam giác ABC có $A(4;3)$; $B(-2;-1)$; $C(8;-1)$. Gọi I, H, G lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp, trực tâm và trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh I, H, G thẳng hàng.

Giải

- $G(x;y)$ là trọng tâm, nên ta có :

$$\begin{cases}x=\frac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)=\frac{1}{3}(4-2+8)=\frac{10}{3}\\ y=\frac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=\frac{1}{3}(3-1-1)=\frac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow G\left(\frac{10}{3};\frac{1}{3}\right).$$

- $H(x;y)$ là trực tâm, nên :

$$\begin{cases}\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}\\ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BC}=0\\ \overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-4=0\\ (x+2)-(y+1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=5.\end{cases}$$

Vậy $H(4;5)$.

- $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp, nên :

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 6y + 25 = 4x + 2y + 5 \\ -8x - 6y + 25 = -16x + 2y + 65 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2y - 5 = 0 \\ x - y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow I(3;-2).$$

Do đó : $\begin{cases} \overrightarrow{IH} = (1;7) \\ \overrightarrow{IG} = \left(\dfrac{1}{3};\dfrac{7}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{IH} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow I,\ H,\ G$ thẳng hàng.

Ví dụ 2. Tam giác ABC có $A(1;8)$; $B(-2;-1)$; $C(6;3)$ và I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi D là điểm đối xứng của A qua I và E là đỉnh của hình thang cân $BCED$ (đáy BC). Chứng minh E thuộc đường tròn $(ABCD)$.

Giải

Gọi $I(x;y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp, nên :

$$IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y = 10 \\ x - y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow I(1;3).$$

- D đối xứng với A qua $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm $AD \Rightarrow D(1;-2)$
- $E(x;y)$ là đỉnh của hình thang cân $BCED$ đáy BC nên :

$$\begin{cases} \overrightarrow{DE} \text{ cùng phương } \overrightarrow{BC} \\ \left|\overrightarrow{CE}\right| = \left|\overrightarrow{BD}\right| \\ \overrightarrow{CE} \text{ không cùng phương } \overrightarrow{BD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = 5 \\ (x-6)^2 + (y-3)^2 = 10 \\ x + 3y \neq 15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow E(5;0).$$

Do đó : $\begin{cases} \overrightarrow{EA} = (-4;+8) \\ \overrightarrow{ED} = (-4;-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{EA}.\overrightarrow{ED} = 0 \Leftrightarrow EA \perp ED$

$\Rightarrow E \in$ đường tròn đường kính $AD \Leftrightarrow E \in$ đường tròn $(ABCD)$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho ba điểm A, B, C trên một trục tọa độ $(0;\vec{i})$ có tọa độ lần lượt là $-2, -6, 4$. Hỏi câu nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i}$. B) $\overline{CA} = -6$.
C) $\overrightarrow{BC} = 10$. D) $\overrightarrow{AB} + \overline{BC} = 6$.

Câu 2. Trên một trục, cho ba điểm A, B, I có tọa độ lần lượt là $4 ; -6$ và m. Nếu $\overline{IA} + \overline{IB} = 0$ thì m bằng :

A) -1. B) 1. C) -2. D) 2.

Câu 3. Trên một trục, cho hai điểm $A(-2), B(9)$. Nếu điểm M thỏa mãn $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ thì tọa độ của M là :

A) $-\dfrac{29}{2}$. B) $\dfrac{29}{4}$. C) 6. D) $\dfrac{29}{2}$.

Câu 4. Trên một trục, cho ba điểm $A(5)$, $B(-2)$, $C(-5)$. Nếu điểm M thỏa mãn $2\overline{MA} + 3\overline{MB} - \overline{MC} = 0$ thì tọa độ của M là :

A) 2. B) 1. C) $\dfrac{9}{4}$. D) $\dfrac{9}{2}$.

Câu 5. Trên trục $(0;\vec{i})$ cho ba điểm $A(a), B(b), C(c)$, xét các mệnh đề sau :

I. $\overline{AB} = b - a$;
II. $\overline{MA} + \overline{MB} = 0 \Leftrightarrow 2\overline{OM} = a + b$;
III. $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0 \Leftrightarrow \overline{OM} = a + b + c$.

Hỏi mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ I và III.
C) Chỉ II và III. D) Cả I, II và III.

Câu 6. Trên trục $x'Ox$ cho các điểm A, B, C biết $\overline{OA} = \sqrt{2}$; $\overline{AC} = 3 - \sqrt{2}$; $\overline{BC} = 4$. Tọa độ điểm B là :

A) 7. B) -1. C) -3. D) $7 + 2\sqrt{2}$.

Câu 7. Cho bốn điểm phân biệt A, B, C, D trên một trục thỏa hệ thức $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$. Câu nào sau đây đúng ?

A) $\overline{AC}.\overline{DB} - \overline{AD}.\overline{CB} = 0$.

B) $\overline{AC}\left(\overline{AB} - \overline{AD}\right) - \overline{AD}\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) = 0$.

C) $\overline{AC}.\overline{AB} - \overline{AD}.\overline{AB} = 2\overline{AC}.\overline{AD}$.

D) $\dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$.

Câu 8. Trên trục $(0;\vec{i})$ cho điểm M có hoành độ bằng -2. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{OM} = -2\vec{i}$.   B) $\overline{OM} = 2$.

C) $\overrightarrow{OM}$ và $\vec{i}$ ngược hướng.   D) $\left|\overrightarrow{OM}\right| = 2$.

Câu 9. Trong hệ trục tọa độ $(0;\ \vec{i};\ \vec{j})$, mệnh đề nào sau đây sai ?

A) $M(x;y) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

B) $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} \Leftrightarrow$ tọa độ của A là 3.

C) $N(x;y) \in x'Ox \Leftrightarrow y = 0$.

D) $\vec{u} = (x;y)$ song song với $y'Oy \Rightarrow x = 0$.

Câu 10. Cho $\vec{u} = (x+3\ ;\ 5)$ và $\vec{v} = (4\ ;\ 4+y)$ là 2 vectơ bằng nhau thì x và y lần lượt là :

A) 1 và -1.   B) -1 và 1.   C) 1 và 1.   D) 7 và 9.

Câu 11. Hai vectơ bằng nhau khi điều kiện nào sau đây xảy ra ?

A) Cùng hướng.   B) Cùng độ dài.

C) Cùng phương.   D) Cùng hướng và cùng độ dài.

Câu 12. Câu nào sau đây sai ? (Xét trong hệ trục $(0;\vec{i};\vec{j})$).

A) $\vec{u} = (2;1)$ và $\vec{v} = (-3;2) \Rightarrow \vec{u}.\vec{v} = (-1;3)$.

B) $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ và $\vec{v} = (0;4) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (2;7)$.

C) $\vec{u} = (0;2)$ và $\vec{v} = (3;0) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (3;2)$.

D) $\vec{u} = (-3;0)$ và $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (1;-1)$.

Câu 13. Trong hệ trục (Oxy) cho hai vectơ $\vec{u} = (3;7)$ và $\vec{v} = (-5;-3)$ thì $\vec{u} - \vec{v}$ có tọa độ :

A) $(8;10)$ B) $(-2;4)$ C) $(8;4)$ D) $(-2;10)$

Câu 14. Cho $\vec{a} = (-2;4)$; $\vec{a} - \vec{b} = (5;7)$; tọa độ của $\vec{b}$ là :

A) $(7;-3)$ B) $(-7;-3)$ C) $(-7;3)$ D) $(7;3)$

Câu 15. Câu nào sau đây sai ?

A) $\vec{a} = (3;-2) \Rightarrow -2\vec{a} = (-6;4)$.

B) $\vec{b} = (1;2) \Rightarrow 4\vec{b} = (4;8)$.

C) $\vec{a} = \left(0;\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow 2\vec{a} = (2;3)$.

D) $\vec{b} = \left(\dfrac{2}{5};1\right) \Rightarrow -\dfrac{2}{3}\vec{b} = \left(-\dfrac{4}{15};-\dfrac{2}{3}\right)$.

Câu 16. Cho $\vec{a} = (3;1)$, $\vec{b} = (-2;2)$, $\vec{c} = (13;-1)$. Câu nào sau đây đúng ?

A) $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. B) $\vec{c} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

C) $\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$. D) $\vec{c} = -3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Câu 17. Cho $\vec{a} = (2;0)$, $\vec{b} = (0;\sqrt{3})$, $\vec{c} = (4;-3)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A) $\vec{c} = 2\vec{a} + \sqrt{3}\,\vec{b}$. B) $\vec{c} = 2\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b}$.

C) $\vec{c} = -2\vec{a} + \sqrt{3}\,\vec{b}$. D) $\vec{c} = -2\vec{a} - \sqrt{3}\,\vec{b}$.

Câu 18. Tỉ số giữa $\vec{a} = (2;\sqrt{3})$ và $\vec{b} = (4;\sqrt{3})$ là :

A) $\dfrac{1}{2}$. B) 1.

C) một số khác. D) không tính được.

Câu 19. Cho $\vec{a} = (9;-3)$, $\vec{b} = (-3;1)$. Câu nào sau đây sai ?

A) $\vec{a} = -3\vec{b}$. B) $\vec{a}, \vec{b}$ ngược hướng.

C) $|\vec{a}| = -3|\vec{b}|$. D) $|\vec{b}| = \sqrt{10}$.

Câu 20. Cho ba mệnh đề sau :

I. Tỉ của vectơ $\vec{a} = (1;4)$ và vectơ $\vec{b} = (2;8)$ là $\dfrac{1}{2}$;

II. Tỉ của $\vec{a} = (1;0)$ và $\vec{b} = (3;0)$ không tồn tại ;

III. Tỉ của $\vec{a} = (0;2)$ và $\vec{b} = (2;0)$ không tồn tại.

Hỏi mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và III. B) Chỉ I. C) Chỉ I và II. D) Cả I, II, III.

Câu 21. Hai vectơ $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$ cùng hướng khi :

A) $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

B) $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2}$.

C) $a_2 = 0$ hoặc $b_2 = 0$.

D) $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases}$ với $k > 0$.

Câu 22. Hai vectơ nào sau đây cùng hướng ?

A) $\vec{a} = (4;0)$ và $\vec{b} = (0;4)$.

B) $\vec{a} = (1;2)$ và $\vec{b} = (-2;4)$.

C) $\vec{a} = (m;n)$ và $\vec{b} = (2m;2n)$.

D) $\vec{a} = (3;5)$ và $\vec{b} = (3m;5m)$.

Câu 23. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1;0)$, $\vec{b} = (0;3)$, $\vec{c} = (1;3)$. Vectơ nào cùng hướng ?

A) $\vec{a}$ và $\vec{c}$.

B) $\vec{b}$ và $\vec{c}$.

C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

B) Không có.

Câu 24. Xét 3 mệnh đề sau :

I. Hai vectơ $\vec{a} = (1;\alpha)$ và $\vec{b} = (-3;-3\alpha)$ ngược hướng ;

II. Hai vectơ $\vec{a} = (0;3)$ và $\vec{b} = (-2;-6)$ ngược hướng ;

III. Hai vectơ $\vec{a} = (\sqrt{2};0)$ và $\vec{b} = (-\sqrt{2};0)$ ngược hướng.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Cả I, II, III.

B) I và III.

C) I và II.

D) II và III.

Câu 25. Trong hệ trục $(0;\vec{i};\vec{j})$ cho vectơ $\overrightarrow{OA} = (x;y)$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

B) $A(x;y)$.

C) $A \in y'Oy \Leftrightarrow x = 0$.

D) $A \in x'Ox \Leftrightarrow y = 0$.

Câu 26. Cho ba điểm $A(2;4)$, $B(-2;5)$, $C(3;3)$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) $\overrightarrow{OA} = (2;4)$.

B) $\overrightarrow{AB} = (-4;1)$.

C) $\overrightarrow{AC} = (1;1)$.

D) $\overrightarrow{BC} = (5;-2)$.

Câu 27. Cho ba điểm $A(1;4)$; $B(2;7)$, $C(-3;3)$. Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm D là :

A) $(-4;0)$.

B) $(4;0)$.

C) $(2;-3)$.

D) $(3;-2)$.

Câu 28. Cho $A(2;-1)$, $B(3;3)$, $C(-2;5)$ và điểm M thỏa mãn : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}$. Lúc đó, tọa độ điểm M là :

A) $(1;9)$.

B) $(-1;9)$.

C) $(2;5)$.

D) $(2;-5)$.

Câu 29. Câu nào sau đây sai ?

A) $M(2;-5)$ và $N(1;2) \Rightarrow MN = 5\sqrt{2}$.

B) $M(2;0)$ và $N(-2;3) \Rightarrow MN = 5$.

C) $M(m+n;n)$ và $N(n;n+m) \Rightarrow MN = \sqrt{m^2 - n^2}$.

D) $M(2p;2p)$ và $N(p+q;p-q) \Rightarrow MN = \sqrt{2(p^2+q^2)}$

Câu 30. Tam giác ABC với $A(1;5)$, $B(4;1)$, $C(8;4)$ có chu vi là :

A) $5\left(2+\sqrt{2}\right)$ B) $5\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ C) 18. D) một số khác.

Câu 31. Cho $A(1;1)$, $B(7;m)$. Nếu $AB = 3\sqrt{5}$ thì giá trị của m là :

A) $m = 4$. B) $m = -2$.
C) $m = 4$ hoặc $m = -2$. D) một số khác.

Câu 32. Cho $A(1;0)$, $B(-1;4)$, $C(6;x)$. Tam giác ABC cân đỉnh C khi giá trị của x là :

A) 5. B) -3. C) 4. D) một số khác.

Câu 33. Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Trường hợp nào sau đây sai ?

A) $A(5;7)$, $B(7;3)$ và $I(6;5)$.

B) $A(-3;5)$, $B(1;3)$ và $I(-1;4)$.

C) $A(0;4)$, $B(-2;0)$ và $I(-1;2)$.

D) $A(1;m)$, $B(-19;1-m)$ và $I\left(-10;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 34. Cho hai điểm $A(4;-2)$ và $B(2;0)$. Điểm C đối xứng của A qua B có tọa độ :

A) $(-4;2)$. B) $(0;2)$. C) $(0;4)$. D) $(-2;2)$.

Câu 35. Cho ba điểm $A(-1;4)$, $B(1;-2)$, $C(7;6)$. Đường thẳng d qua điểm $M(0;1)$ và song song với AC cắt đường thẳng BC tại điểm N. Khi đó, tọa độ điểm N là :

A) $(0;2)$. B) $(4;1)$. C) $(4;2)$. D) $(3;3)$.

Câu 36. Cho tam giác ABC với $A(4;6)$, $B(0;-3)$, $C(2;7)$ thì trung tuyến AM có độ dài là :

A) 2. B) 4. C) 6. D) một số khác.

Câu 37. Cho ba điểm $A(3;-1)$, $B(1;3)$, $C(5;2)$. Điểm M thỏa mãn điều kiện :

$2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0}$ khi tọa độ của điểm M là :

A) $(10;1)$.
B) $(-8;2)$.
C) $(6;-2)$.
D) $(-11;-1)$.

Câu 38. Trọng tâm G của tam giác ABC với $A(-3;-5)$, $B(2;7)$, $C(7;5)$ có tọa độ là :

A) $\left(2;\frac{7}{3}\right)$.
B) $\left(3;\frac{7}{3}\right)$.
C) $(3;7)$.
D) $\left(-2;\frac{7}{3}\right)$.

Câu 39. Cho điểm $B(10;0)$ và $M(x;y)$ với $y > 0$, sao cho tam giác OMB là tam giác đều (0 là gốc tọa độ) thì tọa độ $(x;y)$ là :

A) $(5;5)$.
B) $(5;5\sqrt{2})$.
C) $(5;5\sqrt{3})$.
D) $(5;6)$.

Câu 40. Cho hình thang $ABCD$ có đáy lớn AD dài gấp đôi đáy nhỏ BC. Nếu $A(-2;1)$, $B(1;5)$, $C(4;3)$ thì tọa độ điểm D là :

A) $(3;-3)$.
B) $(4;-3)$.
C) $(4;-2)$.
D) một đáp số khác.

Câu 41. Cho tam giác ABC có $A(7;3)$, $B(-2;5)$ và trọng tâm $G(2;4)$ thì tọa độ điểm C là :

A) $(1;4)$.
B) $(-1;4)$.
C) $(1;2)$.
D) $(1;3)$.

Câu 42. Tìm điểm $A \in x'Ox$ và điểm $B \in y'Oy$ sao cho tam giác ABC với $C(3;6)$ có trọng tâm $G(2;3)$.

A) $A(-3;0)$ và $B(0;-3)$.
B) $A(3;0)$ và $B(0;3)$.
C) $A(-3;0)$ và $B(0;3)$.
D) $A(3;0)$ và $B(0;-3)$.

Câu 43. Cho ba mệnh đề sau :

I. $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$;

II. $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$ vuông góc khi $a_1b_1 + a_2b_2 = 0$;

III. $\vec{a} = (a_1;a_2)$ và $\vec{b} = (b_1;b_2)$ thì $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$.

Hỏi mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II.
B) Chỉ II và III.
C) Chỉ I và III.
D) Cả I, II, III.

Câu 44. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) $\vec{a} = (1;3)$ và $\vec{b} = (-2;5) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 13$.

B) $\vec{a} = (4;-3)$ và $\vec{b} = (6;8) \Rightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc.

C) $\vec{a} = \left(4;\frac{1}{3}\right)$ và $\vec{b} = \left(\frac{1}{4};m\right)$ vuông góc khi $m = 3$.

D) $\vec{a} = (1;5)$ và $\vec{b} = (15;m)$ có $\vec{a}.\vec{b} = 30$ thì $m = 3$.

Câu 45. Cho ba mệnh đề :

I. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$;

II. $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$;

III. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$.

Trong đó, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì. Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ I và III. C) Chỉ II và III. D) Cả I, II, III.

Câu 46. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (3;5)$, $\vec{c} = (-2;4)$ và ba mệnh đề :

I. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c} = (-26;+52)$;

II. $\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = (-26;+52)$;

III. $\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = \left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c}$ (do tính kết hợp).

Mệnh đề nào đúng ?

A) Cả I, II, III. B) Chỉ I. C) Chỉ III. D) Chỉ I và III.

Câu 47. Cho ba vectơ $\vec{a} = (1;2)$, $\vec{b} = (3;5)$, $\vec{c} = (+2;4)$ và 2 mệnh đề :

I. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c} = (26;52)$; II. $\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = (26;52)$.

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) Không có. D) Cả I và II.

Câu 48. Cho $\vec{a} = (1;0)$, $\vec{b} = (0;1)$, $\vec{c} = (2;2)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A) $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$. B) $\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} = \left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$.

C) $\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b} = \left(\vec{b}.\vec{c}\right).\vec{a}$. D) $\left|\left(\vec{a}.\vec{c}\right).\vec{b}\right| = \left|\left(\vec{b}.\vec{c}\right).\vec{a}\right|$.

Câu 49. Cho ba điểm $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$, $M(x;y)$, số thực $k \neq 1$, $A \neq B$ và ba mệnh đề sau :

I. $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = k \Leftrightarrow \overline{MA} = k\overline{MB}$;

II. $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M\begin{cases} x = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} \\ y = \dfrac{y_A - ky_B}{1-k} \end{cases}$;

III. M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow M\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}(x_A - x_B) \\ y = \dfrac{1}{2}(y_A - y_B). \end{cases}$

Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A) Chỉ I và II.
B) Chỉ I và III.
C) Chỉ II và III.
D) Cả I, II và III.

Câu 50. Cho $A(1;4)$, $B(3;7)$ và $\overline{MA} = 3\overline{MB}$ thì tọa độ của M là :

A) $\left(-4;-\dfrac{17}{2}\right)$.
B) $\left(\dfrac{5}{2};\dfrac{25}{4}\right)$.
C) $\left(4;\dfrac{17}{2}\right)$.
D) $\left(-\dfrac{5}{2};\dfrac{25}{4}\right)$.

Câu 51. Cho $A(4;7)$ và $B(10;4)$. Nếu điểm $M(x;5)$ chia đoạn AB theo tỉ k thì giá trị của k và x lần lượt là :

A) 2 và 6.
B) -2 và 8.
C) -1 và 8.
D) 3 và 15.

Câu 52. Cho tam giác ABC với $A(4;5)$, $B(1;1)$, $C(12;-1)$. Chân đường phân giác trong AD của góc A có tọa độ :

A) $\left(4;\dfrac{1}{2}\right)$.
B) $\left(3;\dfrac{1}{2}\right)$.
C) $\left(\dfrac{14}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
D) $\left(\dfrac{14}{5};\dfrac{1}{5}\right)$.

Câu 53. Cho tam giác ABC với $A(4;5)$, $B(1;1)$, $C(12;-1)$. Chân đường phân giác ngoài AE của góc A có tọa độ :

A) $(-10;3)$.
B) $(-8;3)$.
C) $(-8;2)$.
D) $(-10;1)$.

Câu 54. Cho tam giác ABC có $AB = 4\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{5}$, $B(0;-3)$, $C(11;-1)$. E là chân đường phân giác trong của góc A; Tọa độ của E là :

A) $\left(\dfrac{22}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$
B) $\left(\dfrac{22}{3};-\dfrac{5}{3}\right)$
C) $\left(7;-\dfrac{4}{3}\right)$
D) một đáp số khác.

Câu 55. Cho tam giác ABC có $AC = 2AB$; $B(-2;2)$, chân đường phân giác ngoài của góc A là $F(-8;-3)$, thì tọa độ của C là :

A) $(4;6)$. B) $(3;6)$.

C) $(4;7)$. D) một đáp số khác.

Câu 56. Cho $A(-1;-2)$, $B(13;0)$, $C(3;-5)$. Góc $\widehat{BAC}$ có số đo là :

A) 30^0. B) 60^0. C) 90^0. D) một số khác.

Câu 57. Cho tam giác ABC có $A(0;5)$, $B(-4;0)$, $C(6;1)$. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

A) $\widehat{A} = 60^0$. B) $\widehat{A} = 30^0$. C) $\widehat{A} = 90^0$. D) $\widehat{A} > 90^0$.

Câu 58. Cho tam giác ABC có $A(0;1)$, $B(6;4)$, $C(2;7)$. Chân đường cao vẽ từ C là điểm C' có tọa độ là :

A) $(4;3)$. B) $(3;4)$. C) $(4;2)$. D) $(3;3)$.

Câu 59. Cho $A(-8;8)$, $B(6;6)$ và $C(c;0) \in x'Ox$; Tam giác ABC vuông góc tại C khi và chỉ khi c bằng :

A) 0. B) -2.

C) 0 hoặc -2. D) một đáp số khác.

Câu 60. Tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC với $A(4;1)$, $B(-2;5)$, $C(6;4)$ có tọa độ là :

A) $(3;3)$. B) $\left(2;\frac{9}{2}\right)$.

C) $\left(2;\frac{7}{2}\right)$. D) một đáp số khác.

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. C	5. A
6. B	7. D	8. B	9. B	10. C
11. D	12. D	13. A	14. B	15. C
16. A	17. B	18. D	19. C	20. A
21. D	22. C	23. D	24. B	25. A
26. C	27. A	28. B	29. C	30. A
31. C	32. A	33. D	34. B	35. C
36. D	37. D	38. A	39. C	40. B
41. A	42. B	43. D	44. C	45. A
46. B	47. D	48. D	49. A	50. C
51. B	52. C	53. A	54. B	55. C
56. D	57. D	58. A	59. C	60. B

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $\overline{BC} = 10$ hoặc $BC = 10\vec{i}$. Chọn C

Câu 2. $\overline{IA} + \overline{IB} = 0 \Rightarrow I$ là trung điểm $AB \Rightarrow m = \dfrac{4+(-6)}{2} = -1$. Chọn A

Câu 3. Gọi m là tọa độ của điểm M. Ta có :

$\overline{MA} = 3\overline{MB} \Leftrightarrow -2-m = 3(9-m) \Leftrightarrow m = \dfrac{29}{2}$. Chọn D

Câu 4. Gọi m là tọa độ của điểm M.

$2\overline{MA} + 3\overline{MB} - \overline{MC} = 0 \Leftrightarrow 2(5-m) + 3(-2-m) - (-5-m) = 0$

$\Leftrightarrow m = \dfrac{9}{4}$. Chọn C

Câu 5. $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 0$

$\Leftrightarrow \left(\overline{OA} - \overline{OM}\right) + \left(\overline{OB} - \overline{OM}\right) + \left(\overline{OC} - \overline{OM}\right) = 0$

$\Leftrightarrow 3\overline{OM} = a + b + c$. III sai, còn I, II đúng. Chọn A

Câu 6. $\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AC} + \overline{CB} = \sqrt{2} + \left(3 - \sqrt{2}\right) + (-4)$ (vì $\overline{BC} = 4$)

$= -1 \Rightarrow$ Tọa độ của B là -1. Chọn B

Câu 7. $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \overline{CA}.\overline{DB} + \overline{CB}.\overline{DA} = 0$

$\Leftrightarrow \overline{AC}\left(\overline{AB} - \overline{AD}\right) + \overline{AD}\left(\overline{AB} - \overline{AC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AB} - \overline{AC}.\overline{AD} + \overline{AB}.\overline{AD} - \overline{AC}.\overline{AD} = 0$

$\Leftrightarrow 2\overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AD} + \overline{AC}.\overline{AB}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{AB} = \dfrac{1}{AC} + \dfrac{1}{AD}$ (chia 2 vế cho $\overline{AB}.\overline{AC}.\overline{AD}$). Chọn D

Câu 8. $\overline{OM} = -2$. Chọn B

Câu 9. $\overrightarrow{OA} = 3\vec{i} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = 3\vec{i} + 0.\vec{j} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = (3;0)$ hay tọa độ của A là $(3;0)$.

Chọn B

Câu 10. $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=4 \\ 5=4+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$ Chọn C

Câu 11. Hai vectơ bằng nhau khi chúng cùng hướng và cùng độ dài. Chọn D

Câu 12. $\vec{u} = (-3;0)$ và $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j} = (2;-1) \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} = (-1;-1)$. Chọn D

Câu 13. $\vec{u} = (3;7)$ và $\vec{v} = (-5;-3) \Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = (8;10)$. Chọn A

Câu 14. $\vec{b} = \vec{a} - (\vec{a} - \vec{b}) = (-2;4) - (5;7) = (-7;-3)$. Chọn B

Câu 15. $\vec{a} = \left(0;\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow 2\vec{a} = \left(0.2;\dfrac{3}{2}.2\right) = (0;3)$. Chọn C

Câu 16. Đặt $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\alpha - 2\beta = 13 \\ \alpha + 2\beta = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2. \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$. Chọn A

Ghi chú. Có thể thử như sau : $3\vec{a} - 2\vec{b} = (9;3) + (4;-4) = (13;-1)$.

Vậy *A* đúng. Chọn A

Câu 17. Ta có : $2\vec{a} - \sqrt{3}\vec{b} = (4;0) - (0,\sqrt{3}.\sqrt{3}) = (4;3)$. Chọn B

Câu 18. Vì $\dfrac{2}{4} \neq \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ nên $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương, do đó, không có tỉ số giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Chọn D

Câu 19. $\vec{a} = (9;-3) = -3(-3;1) = -3\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}| = |-3|.|\vec{b}| = 3.|\vec{b}|$. Chọn C

Câu 20. $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{b} \Rightarrow$ I đúng ‘

$\vec{a} = (1;0) = \dfrac{1}{3}(3;0) = \dfrac{1}{3}\vec{b} \Rightarrow II$ sai ;

$\vec{a} = (0;2)$ và $\vec{b} = (2;0)$: không cùng phương $\Rightarrow$ III đúng. Chọn A

Câu 21. $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \end{cases}$ với $k > 0 \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng. Chọn D

Câu 22. $\vec{a} = (m;n)$ và $\vec{b} = (2m;2n) \Rightarrow \vec{b} = 2\vec{a} \Rightarrow \vec{a}, \vec{b}$ cùng hướng. Chọn C

Câu 23. Chọn D.

Câu 24. $\dfrac{0}{-2} \neq \dfrac{3}{-6} \Rightarrow \vec{a} = (0;3)$ và $\vec{b} = (-2;-6) \Rightarrow II$ sai ;

$\vec{b} = (-3;-3\alpha) = -3(1;\alpha) \Rightarrow \vec{b} = -3\vec{a} \Rightarrow I$ đúng ;

$\vec{b} = (-\sqrt{2};0) = -(\sqrt{2};0) = -\vec{a} \Rightarrow III$ đúng. Chọn B

Câu 25. $OA = \sqrt{x^2 + y^2} \neq \overrightarrow{OA}$. Chọn A

Câu 26. $\overrightarrow{AC} = (1;-1)$. Chọn C

Câu 27. $\overrightarrow{BC} = (-5;-4) \Rightarrow D(-4;0)$ vì $\overrightarrow{AD} = (-5;-4) = \overrightarrow{BC}$. Chọn A

Ghi chú. Cách khác ta đặt $D(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (x-1;y-4)$

$ABCD$: Hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=-5 \\ y-4=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow D(-4;0)$.

Câu 28. $M(x,y)$. Ta có : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=(x-3)+(x+2) \\ y+1=(y-3)+(y-5) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=9 \end{cases} \Rightarrow M(-1;9)$. Chọn B

Câu 29. $M(m+n;m)$ và $N(n;n+m)$

$\Rightarrow MN = \sqrt{(n-m-n)^2 + (n+m-m)^2}$

$\Rightarrow MN = \sqrt{m^2+n^2} \neq \sqrt{m^2-n^2}$. Chọn C

Câu 30. $AB = \sqrt{(4-1)^2 + (1-5)^2} = 5, BC = \sqrt{(8-4)^2 + (4-1)^2} = 5$,

$AC = \sqrt{(8-1)^2 + (4-1)^2} = 5\sqrt{2}$.

Vậy chu vi là $5 + 5 + 5\sqrt{2} = 5(2+\sqrt{2})$. Chọn A

Câu 31. $AB = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(7-1)^2 + (m-1)^2} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 36 + (m-1)^2 = 45$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=-2. \end{array}\right.$ Chọn C

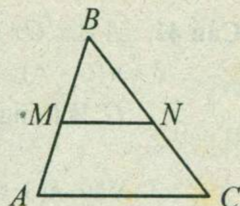
Câu 32. ΔABC cân đỉnh C

$\Leftrightarrow AC^2 = BC^2 \Leftrightarrow (6-1)^2 + (x-0)^2 = (6+1)^2 + (x-4)^2$

$\Leftrightarrow 25 + x^2 = 49 + x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x = 5$. Chọn A

Câu 33. $A(1;m)$ $B(-19;1-m) \Rightarrow I\left(\frac{1-19}{2}, \frac{m+1-m}{2}\right) \Rightarrow I\left(-9;\frac{1}{2}\right)$. Chọn D

Câu 34. Chọn B.



Câu 35. Dễ thấy $A(-1;4)$, $B(1;-2)$ thì $M(0;1)$ là trung điểm của AB; mà MN song song AC nên N là trung điểm của BC. Suy ra :

$N\left(\dfrac{1+7}{2};\dfrac{-2+6}{2}\right) \Rightarrow N(4;2)$.

Chọn C

Câu 36. $B(0;-3), C(2;7) \Rightarrow M(1;2)$. Mà $A(4;6)$

nên $AM = \sqrt{(1-4)^2+(2-6)^2} = 5$. Chọn D

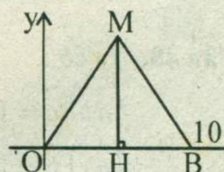
Câu 37. $M(x;y)$. Ta có :

$$2\overrightarrow{AM} + 3\overrightarrow{BM} - 4\overrightarrow{CM} = \vec{0}$$
$$\Leftrightarrow 2(x-3;y+1) + 3(x-1;y-3) - 4(x-5;y-2) = (0;0)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow M(-11;-1).$$

Chọn D

Câu 38. Ta có : $G\begin{cases} x = \dfrac{-3+2+7}{3} = 2 \\ y = \dfrac{-5+7+5}{3} = \dfrac{7}{3}. \end{cases}$ Chọn A

Câu 39. $M(x;y)$, vẽ đường cao MH.



Ta có : $\begin{cases} x = x_H = 5 \\ y = HM = 5\sqrt{3} > 0. \end{cases}$

Chọn C

Câu 40. Ta có : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = 2(x_C - x_H) \\ y_D - y_A = 2(y_C - y_B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = 2(4-1) \\ y_D - 1 = 2(3-5) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = -3 \end{cases} \Leftrightarrow D(4;-3).$$

Chọn B

Câu 41. Ta có : $\begin{cases} 3x_G = x_A + x_B + x_C \\ 3y_G = y_A + y_B + y_C \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6 = 7 - 2 + x_C \\ 12 = 3 + 5 + y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = 4. \end{cases}$ Vậy $C(1;4)$. Chọn A

Câu 42. $A \in x'Ox \Rightarrow A(x_A;0)$, $B \in y'Oy \Rightarrow B(0;y_B)$.

G là trọng tâm $\Delta ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_A + 0 + 3 = 2.3 \\ 0 + y_B + 6 = 3.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = 3 \\ y_B = 3. \end{cases}$

Vậy $A(3;0)$ và $B(0;3)$. Chọn B

Câu 43. Chọn D.

Câu 44. Ta có : $\vec{a} = \left(4;\frac{1}{3}\right)$ và $\vec{b} = \left(\frac{1}{4};3\right) \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = 4.\frac{1}{4} + \frac{1}{3}.3 = 2 \neq 0$.

Vậy $\vec{a}$, $\vec{b}$ không vuông góc với nhau. Chọn C

Câu 45. Khi $\vec{a}$, $\vec{c}$ không cùng phương thì $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c}$ và $\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right)$ không cùng phương nên III sai, còn I và II đúng. Chọn A

Câu 46. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c} = 13.\vec{c} = (-26;52) \Rightarrow$ I đúng ;

$\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = 14\vec{a} = (14;28) \Rightarrow$ II sai.

Suy ra III sai. Chọn B

Câu 47. $\left(\vec{a}.\vec{b}\right)\vec{c} = 13\vec{c} = (926;52) \Rightarrow$ I đúng ;

$\vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = 26\vec{a} = (26;52) \Rightarrow$ II đúng. Chọn D

Câu 48. Ta có :

$\left.\begin{array}{l} \left(\vec{a}.\vec{b}\right).\vec{c} = 0.\vec{c} = \vec{0} \\ \left(\vec{a}.\vec{c}\right).\vec{b} = 2\vec{b} = (0;2) \\ \vec{a}.\left(\vec{b}.\vec{c}\right) = \left(\vec{b}.\vec{c}\right)\vec{a} = 2\vec{a} = (2;0) \end{array}\right\} \Rightarrow A, B, C$ đều sai ;

$\left|\left(\vec{a}.\vec{c}\right)\vec{b}\right| = 2$ và $\left|\left(\vec{b}.\vec{c}\right)\vec{a}\right| = 2 \Rightarrow D$ đúng. Chọn D

Câu 49. M là trung điểm của $AB \Leftrightarrow M\begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_A + x_B) \\ y = \frac{1}{2}(y_A + y_B) \end{cases} \Rightarrow$ III sai. Chọn A

Câu 50. $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow M\begin{cases} x = \dfrac{1-3.3}{1-3} = 4 \\ y = \dfrac{4-3.7}{1-k} = \dfrac{17}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(4;\frac{17}{2}\right)$. Chọn C

Câu 51. $\overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Rightarrow y_A - y_M = k(y_B - y_M) \Rightarrow 7 - 5 = k(4-5) \Rightarrow k = -2$

$x_M = \dfrac{x_A - kx_B}{1-k} = \dfrac{4 + 2.10}{1+2} = 8$. Vậy $k = -2$ và $x = 8$. Chọn B

Ghi chú. Ta có thể giải nhanh như sau :

Vì $7 > 5 > 4 \Rightarrow y_A > y_B$ nên M nằm giữa 2 điểm A, B do đó $k < 0$.

Vì $5 \neq \dfrac{4+7}{2} \Rightarrow M$ không thể là trung điểm của $AB \Rightarrow k = -1$ bị loại.

Vậy $k = -2$. Chọn B

Câu 52. $AB = \sqrt{(1-4)^2 + (1-5)^2} = 5$;

$AC = \sqrt{(4-12)^2 + (5)^2} = 10 \Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = 2$.

$\dfrac{\overrightarrow{MC}}{\overrightarrow{MB}} = -2 \Rightarrow D\begin{cases} x = \dfrac{12+2}{1+2} = \dfrac{14}{3} \\ y = \dfrac{-1+2}{1+2} = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(\dfrac{14}{3}; \dfrac{1}{3}\right)$. Chọn C

Câu 53. Ta có : $AB = 5,\ AC = 10,\ AC = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{EC} = 2\overrightarrow{EB}$.

Do đó : $E\begin{cases} x = \dfrac{12-2}{1-2} = -10 \\ y = \dfrac{-1-2}{1-2} = 3. \end{cases}$ Vậy $E(-10;3)$. Chọn A

Câu 54. Ta có : $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{4\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 2 \Rightarrow \overrightarrow{EB} = -2\overrightarrow{EC} \Rightarrow E\begin{cases} x = \dfrac{0 + 2.11}{1+2} = \dfrac{22}{3} \\ y = \dfrac{-3 + 2(-1)}{1+2} = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

Vậy $E\left(\dfrac{22}{3}; -\dfrac{5}{3}\right)$. Chọn B

Câu 55. $AC = 2AB \Rightarrow \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FB} \Rightarrow B$: trung điểm của $FC \Rightarrow$

$\begin{cases} 2x_B = x_C + x_F \\ 2y_B = y_C + y_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 = -8 + x_F \\ 4 = -3 + y_F \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_F = 4 \\ y_F = 7 \end{cases} \Rightarrow F(4;7)$. Chọn C

Câu 56. $\overrightarrow{AB} = (14;2)$, $\overrightarrow{AC} = (4;-3)$

$\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{56-6}{\sqrt{196+4}.\sqrt{16+9}} = \dfrac{50}{10\sqrt{2}.5} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow \cos A = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow A = 45^0$. Chọn D

Câu 57. $\overrightarrow{AB} = (-4;-5)$ $\overrightarrow{AC} = (6;-4) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -24 + 20 = -4 < 0$.

Vậy, góc $\widehat{A}$ là góc tù. Chọn D

Câu 58. $\overrightarrow{AB} = (6;3)$; $\overrightarrow{CC'} = (x-2;y-7)$ với $C'(x;y)$; $\overrightarrow{AC'} = (x;y-1)$.

C' là chân đường cao $\Leftrightarrow \begin{cases} CC' \perp AB \\ \overrightarrow{AC'} \text{ và } \overrightarrow{AB} \text{ cùng phương} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-2) + 3(y-7) = 0 \\ \dfrac{x}{6} = \dfrac{y-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 3. \end{cases}$ Vậy $C'(4;3)$. Chọn A

Câu 59. $\overrightarrow{AC} = (c+8;-8)$, $\overrightarrow{BC} = (c-6;-6)$;

$\widehat{ACB} = 90^0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC} = 0$

$\Leftrightarrow (c+8)(c-6) + 48 = 0 \Leftrightarrow c^2 + 2c = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -2. \end{array}\right.$ Chọn C

Câu 60. $\overrightarrow{AB} = (-6;4)$, $\overrightarrow{AC} = (2;3) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = -12 + 12 = 0$

$\Rightarrow \widehat{BAC} = 90^0$. Do đó, tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn đường kính BC, có tâm là $I\left(2;\dfrac{9}{2}\right)$. Chọn B

Chuyên đề 5.

ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Phương trình tổng quát

• Vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ $\vec{n} \neq \vec{0}$ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.

• Phương trình tổng quát

Mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát

$$ax + by + c = 0 \text{ với } a^2 + b^2 \neq 0 \quad (1)$$

• Từ phương trình tổng quát của Δ ta có một vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (a\,;b)$.

2. Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

• Đường thẳng $ax + by = 0$ đi qua gốc tọa độ.

• Đường thẳng $ax + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Oy.

• Đường thẳng $by + c = 0$ song song hoặc trùng với Ox.

• Đường thẳng Ox có phương trình $y = 0$ và đường thẳng Oy có phương trình $x = 0$.

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a\,;b)$ là :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (2)$$

• Đường thẳng đi qua hai điểm $A(a\,;0)$ và $B(0\,;b)$ có phương trình

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \ (a \neq 0; b \neq 0)$$

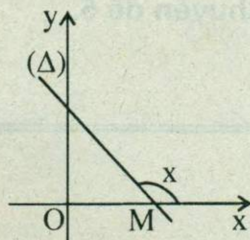
được gọi là phương trình theo đoạn chắn.

• Phương trình $y = kx + m$ gọi là phương trình của Δ theo hệ số góc k.

• Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0\,; y_0)$ và có hệ số góc k là :

$$y - y_0 = k(x - x_0) \qquad (3)$$

Chú ý



• Khi $k \neq 0$ và Δ cắt Ox tại M thì α là góc hợp bởi chiều dương của trục hoành và Δ và $k = \tan\alpha$.

• Đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ có hệ số góc $k = -\dfrac{a}{b}$ với $b \neq 0$.

II. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0\,;\ \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

• Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

• $\Delta_1 \,//\, \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$ (4)

• $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

III. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

• Khoảng cách từ điểm $M_0(x_0\,; y_0)$ đến đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ là :

$$d(M_0, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad (5)$$

• Cho hai đường thẳng cắt nhau

$$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ và } \Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là :

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \qquad (6)$$

• Vị trí của hai điểm đối với một đường thẳng

Cho đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ và hai điểm $M(x_M\,; y_M)$; $N(x_N\,; y_N)$ không nằm trên Δ.

+ M và N nằm cùng phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) > 0.$$

+ M và N nằm khác phía đối với Δ khi và chỉ khi

$$(ax_M + by_M + c)(ax_N + by_N + c) < 0.$$

IV. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Góc (Δ_1, Δ_2) của hai đường thẳng

$\Delta_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0$ và $\Delta_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0$ là :

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \quad (7)$$

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.
- Nếu $\Delta_1 : y = k_1x + b_1$ và $\Delta_2 : y = k_2x + b_2$ thì $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$.

V. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.

Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (b; -a)$.

2. Phương trình tham số của đường thẳng

Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$. Phương trình tham số của Δ là :

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} (a^2 + b^2 \neq 0 \text{ và } t \in \mathbb{R}) \quad (8)$$

- Nếu $\vec{u} = (a; b)$ là vectơ chỉ phương của Δ thì hệ số k của Δ là $k = \frac{b}{a}$ với $b \neq 0$.

VI. PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

- Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a; b)$ là :

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} \; (a \neq 0;\, b \neq 0) \quad (9)$$

• ***Chú ý.***

Nếu $a = 0$ hoặc $b = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

1. Tìm một điểm $M_0(x_0;y_0)$ thuộc đường thẳng và một vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a;b)$ hoặc vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1;u_2)$ để áp dụng các công thức theo yêu cầu của bài toán.
2. Nếu Δ có vectơ chỉ phương $(b;-a)$ thì vectơ pháp tuyến của Δ là $\vec{n} = (a;b)$.

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC có $A(-1;2)$, $B(2;-4)$, $C(1;0)$

a) Viết phương trình tổng quát của đường cao AH; đường phân giác trong của góc $\widehat{BAC}$.

b) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường trung trực cạnh BC và trung tuyến AM.

Giải

a) • Đường cao AH qua $A(-1;2)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{BC} = (-1;4)$ nên phương trình tổng quát của AH là :

$$-(x+1)+4(y-2)=0 \Leftrightarrow x-4y+9=0.$$

• Đường thẳng AB qua $A(-1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (3;-6)$ nên có phương trình tổng quát là $6(x+1)+3(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x+y=0$

Tương tự, phương trình AC là $x+y-1=0$.

Do đó, phương trình các đường phân giác của góc $\widehat{A}$ là :

$$\frac{2x+y}{\sqrt{5}} = \pm\frac{x+y-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll}\left(2\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)y+\sqrt{5}=0 & (1)\\ \left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)y-\sqrt{5}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Thay tọa độ $B(2;-4)$ vào (2) ta được $2\sqrt{2}-5\sqrt{5}<0$,

Thay toạ độ $C(1;0)$ vào (2) ta được $2\sqrt{2}>0$.

Vậy, phương trình phân giác trong của $\widehat{BAC}$ là :

$$\left(2\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)x+\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)y-\sqrt{5}=0.$$

b) • Trung trực cạnh BC qua trung điểm M của $BC \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};-2\right)$ có $\overrightarrow{BC}=(-1;4)$ là vectơ pháp tuyến nên vectơ chỉ phương của trung trực là $\vec{u}=(4;1)$.

Vậy, phương trình tham số của đường trung trực cạnh BC là :

$$\begin{cases} x=\frac{3}{2}+4t \\ y=-2+t \end{cases}$$

và phương trình chính tắc là $\dfrac{x-\frac{3}{2}}{4}=\dfrac{y+2}{1}$.

• Trung tuyến AM qua $A(-1;2)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{5}{2};-4\right)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=-1+\frac{5}{2}t \\ y=2-4t \end{cases}$

và phương trình chính tắc là $\dfrac{x+1}{\frac{5}{2}}=\dfrac{y-2}{-4}$.

Ví dụ 2. Cho ba đường thẳng

$d_1: 2x-y+5=0$, $d_2: -x+y+1=0$, $d_3: 3x+4y-5=0$.

Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2.

a) Viết phương trình tham số của đường thẳng Δ_1 qua A và $\Delta_1 \perp d_3$

b) Viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ_2 qua A và $\Delta_2 \mathbin{//} d_3$.

c) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ_3 qua A và tạo với d_3 một góc bằng 45^0.

Giải

a) Giao điểm A của d_1 và d_2 có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 2x-y+5=0 \\ -x+y+1=0 \end{cases} \Rightarrow A(-6;-7)$$

$\Delta_1 \perp d_3$ nên Δ_1 có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(3;4)$ và Δ_1 qua $A(-6;-7)$ nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=-6+3t \\ y=-7+4t. \end{cases}$

b) $\Delta_2 // d_3$ nên Δ_2 có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (4, -3)$ và Δ_2 qua A nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x+6}{4} = \dfrac{y+7}{-3}$.

c) d_3 có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4; -3)$. Gọi k là hệ số góc của Δ_3 thì vectơ chỉ phương của Δ_3 là $\vec{u}_3 = (1; k)$, d_3 hợp với Δ_3 góc 45^0 nên :

$$\cos 45^0 = \frac{|4-3k|}{\sqrt{25}.\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 7k^2 + 48k - 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = -7 \text{ hay } k = \frac{1}{7}.$$

Vậy, phương trình Δ_3 là $y = k(x - x_A) + y_A \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7x + y + 49 = 0 \\ x - 7y - 43 = 0. \end{array}\right.$

Dạng 2. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

- Sử dụng công thức (4) hoặc giải trực tiếp hệ phương trình của hai đường thẳng theo yêu cầu.

Ví dụ 1. Cho hai đường thẳng

$\Delta_1 : 4x - my + 4 - m = 0$, $\Delta_2 : (2m+6)x + y - 2m - 1 = 0$.

Biện luận theo m vị trí tương đối của Δ_1 và Δ_2.

Giải

- Δ_1 cắt $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2m+6} \neq \dfrac{-m}{1} \Leftrightarrow m^2 + 3m + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow m \neq -1$ và $m \neq -2$.

- Δ_1 song song $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2m+6} = \dfrac{-m}{1} \neq \dfrac{4-m}{-2m-1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ hay } m = -2 \\ m^2 + m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ và } m \neq -2 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

- Δ_1 trùng với $\Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{4}{2m+6} = \dfrac{-m}{1} = \dfrac{4-m}{-2m-1} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy :

- $m \neq -1$ và $m \neq -2 \Leftrightarrow \Delta_1$ cắt Δ_2.
- $m = -1 \Leftrightarrow \Delta_1 // \Delta_2$.
- $m = -2 \Leftrightarrow \Delta_1$ trùng với Δ_2.

Ví dụ 2. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây và tìm tọa độ giao điểm của chúng (nếu có).

a) $\Delta_1 : -2x + y + 1 = 0$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - 3t. \end{cases}$

b) $\Delta_1 : \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+18}{-10}$ và $\Delta_2 : \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+3}{5}$.

c) $\Delta_1 \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 4t' \\ y = 2 - t'. \end{cases}$

Giải

a) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (1;2)$, Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (2;-3)$. Vì $\vec{u}_1$ và $\vec{u}_2$ không cùng phương nên Δ_1 cắt Δ_2.

Tọa độ giao điểm M của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t của phương trình :

$$-2(-1+2t) + 3 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{6}{7}. \text{ Suy ra } M\left(\frac{5}{7}; \frac{3}{7}\right).$$

b) Δ_1 có vectơ chỉ phương $\vec{u_1} = (2;-10)$ và Δ_2 có vectơ chỉ phương $\vec{u_2} = (-1;5)$ cùng phương $\vec{u}_1$. Ngoài ra, điểm $M_0(-2;-3) \in \Delta_2$, thỏa phương trình $\Delta_1 \Leftrightarrow M_0 \in \Delta_1$.

Vậy Δ_1 trùng với Δ_2.

c) Tọa độ giao điểm (nếu có) của Δ_1 và Δ_2 ứng với nghiệm t, t' của hệ phương trình :

$$\begin{cases} -2 + t = 4t' \\ -t = 2 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\dfrac{10}{3} \\ t' = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow \Delta_1 \text{ và } \Delta_2 \text{ cắt nhau.}$$

Tọa độ giao điểm là $\begin{cases} x = -\dfrac{16}{3} \\ y = \dfrac{10}{3}. \end{cases}$

Dạng 3. KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

- Sử dụng công thức $d(M_0, \Delta) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (1)

- Viết phương trình đường thẳng có sử dụng công thức (1).
- Viết phương trình đường phân giác góc nhọn hoặc góc tù.

Ví dụ 1. Cho ba điểm $A(2;0), B(4;1), C(1;2)$.

a) Tìm điểm D đối xứng với A qua đường thẳng BC.

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và cách đều B và C.

Giải

a) $\overrightarrow{BC} = (-3;1) \Rightarrow$ phương trình $BC : x + 3y - 7 = 0$.

Gọi $D(x;y)$ đối xứng A qua $BC \Rightarrow$ trung điểm I của AD là :

$$I\left(\frac{x+2}{2};\frac{y}{2}\right) \in BC \Leftrightarrow \frac{x+2}{2} + 3\frac{y}{2} - 7 = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 12 = 0.$$

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow -3(x-2) + y = 0 \Leftrightarrow -3x + y + 6 = 0$$

Tọa độ D là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 3y - 12 = 0 \\ -3x + y + 6 = 0. \end{cases}$

Giải ta được : $x = 3; y = 3$. Vậy $D(3;3)$.

b) Đường thẳng Δ qua A có hệ số góc k là :

$$y = k(x-2) \Leftrightarrow kx - y - 2 = 0.$$

Δ cách đều B và $C \Leftrightarrow d(B,\Delta) = d(C,\Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|4k-3|}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{|k-4|}{\sqrt{k^2+1}} \Leftrightarrow 4k - 3 = \pm(k-4) \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3} \text{ hay } k = \frac{7}{5}.$$

Vậy, có 2 đường thẳng phải tìm là :

$$\Delta_1 : x + 3y + 6 = 0 \text{ và } \Delta_2 : 7x - 5y - 10 = 0.$$

Ví dụ 2. Tam giác ABC có phương trình các cạnh là : $AB : x - y + 4 = 0$; $BC : 3x + 5y + 4 = 0$ và $AC : 7x + y - 12 = 0$.

a) Viết phương trình phân giác trong của góc A.

b) Tính diện tích tam giác ABC.

Giải

a) Phương trình các đường phân giác của góc A là :

$$\frac{x-y+4}{\sqrt{2}} = \pm\frac{7x+y-12}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x + 3y - 16 = 0 & (1) \\ 3x - y + 2 = 0. & (2) \end{array}\right.$$

Tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x - y + 4 = 0 \\ 3x + 5y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(-3;1)$.

Tương tự ta có $C(2;-2)$, $A(1;5)$.

Lần lượt thay tọa độ B và C vào vế trái của (1) ta được -16 và -20. Vậy, phương trình phân giác trong của góc A là $3x - y + 2 = 0$.

b) Ta có : $BC = a = \sqrt{34}$; $h_a = d(A, BC) = \dfrac{32}{\sqrt{34}}$.

Suy ra diện tích tam giác ABC là $S = \dfrac{1}{2} ah_a = 16$.

Dạng 4. GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp

- Sử dụng công thức (7) khi biết cặp vectơ chỉ phương hoặc cặp vectơ pháp tuyến của 2 đường thẳng.
- Nếu biết hệ số góc của Δ_1 và Δ_2 là k_1 và k_2 thì áp dụng công thức :

$$\tan(\Delta_1, \Delta_2) = \left|\frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

Ví dụ 1. Cho hình vuông có đỉnh $A(4;3)$ và một đường chéo có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Lập phương trình các cạnh BC và đường chéo còn lại của hình vuông.

Giải

a) Dễ dàng thấy điểm A không thuộc đường thẳng $7x - y + 8 = 0$ nên BD có phương trình $7x - y + 8 = 0$. Đường chéo AC qua $A(4;3)$ và vuông góc BD nên có vectơ pháp là $\vec{n} = (1;7)$.

Do đó, phương trình AC là $x - 4 + 7(y - 3) = 0 \Leftrightarrow x + 7y - 25 = 0$.

b) Giao điểm I của hai đường chéo có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 7x - y + 8 = 0 \\ x + 7y - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{31}{25}; \frac{185}{50}\right),$$

I là trung điểm AC nên tọa độ $C\left(-\dfrac{162}{25}; \dfrac{108}{25}\right)$.

Đường thẳng d qua $A(4;3)$ có phương trình :

$$a(x - 4) + b(y - 3) = 0 \Leftrightarrow ax + by - 4a - 3b = 0.$$

d tạo với AC góc 45^0 $\Leftrightarrow \cos 45^0 = \dfrac{|a + 7b|}{\sqrt{a^2 + b^2}.\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow |a + 7b| = 5\sqrt{a^2 + b^2} \Leftrightarrow (a + 7b)^2 = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 - 7ba - 12b^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{4b}{3} \\ a = -\dfrac{3b}{4}. \end{array}\right.$$

• Với $a = \frac{4}{3}b \Leftrightarrow 3a = 4b$ chọn $a = 4 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow d: 4x + 3y - 25 = 0$.

• Với $a = -\frac{3b}{4} \Leftrightarrow 4a = -3b$ chọn $a = 3 \Rightarrow b = -4 \Rightarrow d: 3x - 4y = 0$.

Nếu lấy $AB: 4x + 3y - 25 = 0$ thì $AD: 3x - 4y = 0$.

Do đó, ta viết được CD và BC lần lượt là :

$$4x + 3y + \frac{949}{25} = 0 \text{ và } 3x - 4y + \frac{918}{25} = 0.$$

Ví dụ 2. Tam giác ABC cân tại A. Biết phương trình các cạnh AB và BC lần lượt là $x + 2y - 1 = 0$ và $3x - y + 5 = 0$. Viết phương trình cạnh AC biết AC đi qua $M(1;-3)$.

Giải

Gọi $\vec{n} = (a, b)$ là vectơ pháp tuyến của AC. AC qua $M(1;-3)$ nên có phương trình :

$$a(x-1) + b(y+3) = 0 \ (a^2 + b^2 \neq 0).$$

AB có vectơ pháp tuyến $\vec{n_1} = (1;2)$, BC có vectơ pháp tuyến $\vec{n_2} = (3;-1)$. Tam giác ABC cân tại A nên :

$$\cos(BA, BC) = \cos(CB, CA)$$

$$\Leftrightarrow \frac{|3-2|}{\sqrt{1^2+2^2}.\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+1^2}.\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 5(3a-b) \Leftrightarrow 22a^2 - 15ab + 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{1}{2}b \text{ hay } a = \frac{2}{11}b.$$

• Với $a = \frac{1}{2}b \Leftrightarrow 2a = b$ chọn $a = 1 \Rightarrow b = 2$. Ta có phương trình AC: $x - 1 + 2y + 6 = 0 \Leftrightarrow x + 2y + 5 = 0$ (loại vì $AC \,//\, AB$).

• Với $a = \frac{2}{11}b$; chọn $b = 11 \Rightarrow a = 2$.

Ta có phương trình $AC: 2x - 2 + 11y + 33 = 0 \Leftrightarrow 2x + 11y + 31 = 0$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Vectơ nào sau đây là vectơ pháp tuyến của đường thẳng $d: 4x - 2y + 5 = 0$?

A) $\vec{n} = (4;2)$. B) $\vec{n} = (2;4)$. C) $\vec{n} = (2;-1)$. D) $\vec{n} = (1;1)$.

Câu 2. Cho hai vectơ $\overrightarrow{n_1} = (-\sqrt{2};-2)$, $\overrightarrow{n_2} = (1;\sqrt{2})$ và đường thẳng $d: \sqrt{2}(x-3) + 2y = 0$. Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của d?

A) Chỉ $\overrightarrow{n_1}$. B) Chỉ $\overrightarrow{n_2}$.

C) Không phải $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$. D) Cả $\overrightarrow{n_1}$, $\overrightarrow{n_2}$.

Câu 3. Đường thẳng d đi qua điểm $A(1;-2)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;4)$ có phương trình tổng quát là :

A) $d: 3x + 4y + 5 = 0$. B) $d: 3x + 4y - 5 = 0$.

C) $d: 3x - 4y - 1 = 0$. D) $d: 3x + 4y + 11 = 0$.

Câu 4. Cho $A(3;-2)$, $B(-1;1)$, $C(5;4)$. Đường cao AH của tam giác ABC có phương trình là :

A) $6x + 3y - 4 = 0$. B) $2x + y - 4 = 0$.

C) $6x - 3y + 5 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 5. Cho điểm $M(4;1)$, $N(5;-1)$. Đường trung trực Δ của MN có phương trình :

A) $x - 2y - \frac{9}{2} = 0$. B) $x + 2y - \frac{9}{2} = 0$.

C) $x - 2y + \frac{9}{2} = 0$. D) $x - 2y + 9 = 0$.

Câu 6. Phương trình đường thẳng qua $M(3;-2)$ và có hệ số góc $k = 2$ có phương trình :

A) $y = 2x - 3$. B) $y = 2x - 4$. C) $y = 2x - 8$. D) $y = 2x - 6$.

Câu 7. Đường thẳng $y = 2x - 10$ cắt trục tung tại điểm :

A) $M(0;5)$. B) $M(0;-10)$. C) $M(5;0)$. D) $M(-10;0)$.

Câu 8. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) Đường thẳng $d: y = 3x - 10$ qua điểm $M(0;-10)$.

B) Đường thẳng $d: y = -5x + 2$ qua điểm $N(0;2)$.

C) Đường thẳng $d: y = \sqrt{2}x$ qua điểm $O(0;0)$.

D) Đường thẳng $d: y = 2(x-1) + 3$ qua điểm $P(0;3)$.

Câu 9. Đường thẳng qua $M(0;7)$ và tạo với Ox một góc 60^0 có phương trình :

A) $y=\sqrt{3}x+7$.

B) $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$.

C) $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}+7$.

D) $y=x+7$.

Câu 10. Câu nào sau đây sai ?

A) Hai đường thẳng $d: y=3x-6$ và $d': y=3x+2$ song song.

B) Hai đường thẳng $y=2x-8$ và $y=\left(1-\sqrt{3}\right)x-8$ cắt nhau tại $A(0;-8)$.

C) Hai đường thẳng $y=2x+5$ và $y=-2x+3$ vuông góc.

D) Đường thẳng $y=\dfrac{1}{\sqrt{3}}x-2$ hợp với tia Ox một góc 30^0.

Câu 11. Câu nào sau đây sai ?

A) Đường thẳng qua $A(10;0)$ và $B(0;5)$ có phương trình $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}=1$.

B) Đường thẳng qua $A(2;8)$ và $B(-3;9)$ có phương trình : $\dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-8}{1}$.

C) $(d): \dfrac{x-2}{-5}=\dfrac{y-8}{1} \Leftrightarrow (d): x+5y-42=0$.

D) $(d): \dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}=1 \Leftrightarrow (d): 5x+10y-10=0$.

Câu 12. Vectơ nào sau đây không phải là vectơ chỉ phương của đường thẳng $d: 3x+4y-8=0$?

A) $\vec{a}=(-4;3)$ B) $\vec{a}=(4;3)$ C) $\vec{a}=(4;-3)$ D) $\vec{a}=(8;-6)$.

Câu 13. Đường thẳng qua $M(3;-6)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(2;-1)$ có phương trình tham số là :

A) $\begin{cases} x=3-t \\ y=-6+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

B) $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-6-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C) $\begin{cases} x=3+t \\ y=-6-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

D) $\begin{cases} x=-3+2t \\ y=6-t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 14. Cho $A(1;1)$, $B(-2;4)$, $C(3;6)$. Đường thẳng qua A và song song với BC có phương trình tham số :

A) $\begin{cases} x=1+5t \\ y=1+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

B) $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

C) $\begin{cases} x=1+5t \\ y=1-2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

D) $\begin{cases} x=1-t \\ y=1+2t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 15. Cho đường thẳng $d: \sqrt{3}x - y - \sqrt{3} = 0$. Câu nào sau đây sai ?

A) d có hệ số góc $k = \sqrt{3}$.

B) $\vec{u} = (1; \sqrt{3})$ là vectơ chỉ phương của d.

C) d cắt trục tung tại điểm $M(0; -\sqrt{3})$.

D) Góc hợp bởi tia Ox và d là 30^0.

Câu 16. Cho I. $\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ II. $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng qua $A(-3;2)$ và $B(1;5)$?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) Cả I và II. D) Không có.

Câu 17. Cho đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và 3 điểm $A(2;1)$, $B(0;5)$, $C(5;-5)$. Điểm nào nằm trên d ?

A) Chỉ A. B) A và B. C) A và C. D) A, B và C.

Câu 18. Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình tham số của d ?

A) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

B) $\begin{cases} x = 2 + 6t \\ y = 3 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

C) $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

D) $\begin{cases} x = 6 + 4t \\ y = 1 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$.

Câu 19. Với giá trị nào của t thì khoảng cách từ điểm $A(3;-2)$ đến một điểm $M(3 - t; 2 + t)$ (với $t \in \mathbb{R}$) nhỏ nhất ?

A) $t = 2$. B) $t = -2$. C) $t = 0$. D) $t = -1$.

Câu 20. Từ điểm $A(3;-2)$ vẽ AH vuông góc với đường thẳng d: $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}), (H \in d)$. Tọa độ của H là :

A) $(5;0)$. B) $(3;2)$. C) $(4;-1)$. D) $(2;3)$.

Câu 21. Hai đường thẳng $d: (m-1)x + y - 5 = 0$ và $d': x + (m+1)y + 5 = 0$ cắt nhau khi và chỉ khi :

A) $m \neq 0$ và $m \neq 1$.

B) $m \neq \sqrt{2}$.

C) $m \neq \sqrt{2}$.

D) $m \neq -\sqrt{2}$.

Câu 22. Với giá trị nào của m thì hai đường thẳng

$$d:\begin{cases}x=-\sqrt{2}+(m+2)t\\ y=\sqrt{5}+mt\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \text{ và } d'\begin{cases}x=1-mt\\ y=3+(m-3)t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$$

cắt nhau ?

A) $m\neq 0$. B) $m\neq 3$. C) $\begin{cases}m\neq 0\\ m\neq 3\end{cases}$. D) $\begin{cases}m\neq 2\\ m\neq -\frac{3}{2}\end{cases}$.

Câu 23. Hai đường thẳng nào sau đây trùng nhau :

A) $d: 3x+y+5=0$ và $d': 6x+2y-9=0$.

B) $d: 4x-3y+5=0$ và $d': 4x+3y+5=0$.

C) $d:\begin{cases}x=3+2t\\ y=-2+t\end{cases}$ và $d': x-2y-7=0$.

D) $d: x=3$ và $d': y+2=0$.

Câu 24. Trong hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=3-2t\\ y=1+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \text{ và } d_2:\begin{cases}x=3+t\\ y=1-t\end{cases}(t\in\mathbb{R}),$$

đường thẳng nào trùng với $d: x+y-4=0$?

A) Cả d_1 và d_2. B) Chỉ d_1. C) Chỉ d_2. D) Không có.

Câu 25. Cho hai đường thẳng

$$d_1:\begin{cases}x=x_0+ta\\ x=y_0+tb\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \text{ và } d_2:\begin{cases}x=x_1+t'a\\ y=y_1+t'b\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$$

(trong đó a,b không đồng thời bằng 0). Mệnh đề nào sau đây đúng ?

I. Nếu điểm $M_0(x_0\,;y_0)\in d_2$ thì $d_1\equiv d_2$;

II. Nếu điểm $M_1(x_1\,;y_1)\notin d_1$ thì $d_1 \parallel d_2$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Không có. B) Chỉ I. C) Chỉ II. D) Cả I và II.

Câu 26. Với trị nào của a thì hai đường thẳng sau trùng nhau :

$$d_1:\begin{cases}x=2+at\\ y=3-5t\end{cases}(t\in\mathbb{R}) \text{ và } d_2:\begin{cases}x=2+3t\\ y=3+10t\end{cases}.$$

A) $a=-\frac{3}{2}$. B) $a=\frac{3}{2}$. C) $a=-\frac{5}{2}$. D) $a=\frac{5}{2}$.

Câu 27. Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-3t\\ y=3+4t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có phương trình tổng quát là :

A) $4x+3y-5=0$.

B) $4x+3y-17=0$.

C) $4x-3y-9=0$.

D) một phương trình khác.

Câu 28. Đường thẳng $d:\begin{cases}x=2-4t\\y=-3+7t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$ có phương trình chính tắc và phương trình tổng quát lần lượt là :

A) $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{7}$ và $7x+4y+2=0$.

B) $\dfrac{x+2}{4}=\dfrac{y+3}{7}$ và $7x-4y+2=0$.

C) $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y+3}{7}$ và $7x+4y-2=0$.

D) $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{7}$ và $7x-4y-26=0$.

Câu 29. Đường thẳng $d: 2x-3y+12=0$ có phương trình tham số là :

A) $\begin{cases}x=-6+2t\\y=4-3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B) $\begin{cases}x=-6+3t\\y=4+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C) $\begin{cases}x=-3+3t\\y=2+2t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D) một phương trình khác.

Câu 30. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng $d:\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{5}=1$?

A) $\begin{cases}x=4t\\y=5-5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B) $\begin{cases}x=t\\y=5-\dfrac{5}{4}t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C) $\begin{cases}x=4+4t\\y=-5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D) $\begin{cases}x=4+4t\\y=5t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 31. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình tham số của đường thẳng $d: x-5=0$?

A) $\begin{cases}x=5\\y=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

B) $\begin{cases}x=5+t\\y=t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

C) $\begin{cases}x=5\\y=3t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

D) $\begin{cases}x=5\\y=3-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$.

Câu 32. Cho $d:\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y+3}{3}$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) d có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;-4)$.

B) d có phương trình tổng quát là $3x-4y-18=0$.

C) d có hệ số góc $k=\frac{4}{3}$.

D) d có phương trình tham số $\begin{cases} x=10+4t \\ y=3+3t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Câu 33. Cho tam giác ABC có $A(1;2)$, $B(5;1)$ và điểm C nằm trên đường thẳng $d:\begin{cases} x=3+t \\ y=2+t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$. Để tam giác ABC cân tại đỉnh B thì tọa độ của C là :

A) $(3;4)$. B) $(1;0)$.

C) $(6;5)$. D) $(1;0)$ hoặc $(6;5)$.

Câu 34. Góc tạo bởi hai đường thẳng $2x+y-1=0$ và $x+3y=0$ là :

A) 45^0. B) 60^0. C) 30^0. D) 90^0.

Câu 35. Đường thẳng D qua $A(2;1)$ và tạo với đường thẳng $d: 3x+y-2=0$ một góc 45^0, có phương trình là :

A) $2x-y-3=0$. B) $x+2y-4=0$.

C) $\left[\begin{array}{l} 2x-y-3=0 \\ x+2y-4=0 \end{array}\right.$. D) một phương trình khác.

Câu 36. Hai đường thẳng $4x+3y+12=0$ và $\begin{cases} x=1-2t \\ y=2+mt \end{cases} (t\in\mathbb{R})$ tạo với nhau một góc 45^0 khi m có giá trị :

A) -14 hoặc $\frac{2}{7}$. B) 14 hoặc $-\frac{2}{7}$. C) 14. D) $-\frac{2}{7}$.

Câu 37. Khoảng cách từ điểm $M(2;9)$ đến đường thẳng $d: 3x+4y+10=0$ là

A) $\frac{49}{5}$. B) $\frac{52}{5}$. C) $\frac{54}{5}$. D) $\frac{56}{5}$.

Câu 38. Khoảng cách từ điểm $A(3;-1)$ đến đường thẳng

$$\Delta\begin{cases} x=2+5t \\ y=4-12t \end{cases} (t\in\mathbb{R}) \text{ là :}$$

A) 1. B) $\frac{7}{13}$. C) $\frac{11}{13}$. D) một số khác.

Câu 39. Khoảng cách giữa hai đường thẳng $D_1: 12x-5y+7=0$ và $D_2: 12x-5y-6=0$ là :

A) $\frac{15}{13}$. B) $\frac{14}{13}$. C) 1. D) một số khác.

Câu 40. Bốn đỉnh của hình vuông nằm trên hai đường thẳng

$$D_1 : 2x + 3y - 16 = 0 \text{ và } D_2 : 2x + 3y - 3 = 0.$$

Diện tích của hình vuông ấy là :

A) 4. B) 9. C) 16. D) một số khác.

Câu 41. Đường thẳng D song song và cách đều $D_1 : 3x - 2y + 6 = 0$ và $D_2 : 3x - 2y - 2 = 0$ có phương trình là :

A) $3x - 2y + 2 = 0$. B) $3x - 2y - 2 = 0$.

C) $3x - 2y + 1 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 42. Cho hai đường thẳng $D_1 \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - t \end{cases}$ và $D_2 \begin{cases} x = 2t' \\ y = 1 - t'. \end{cases}$ Tập hợp những điểm $M(x ; y)$ cách đều D_1, D_2 là đường thẳng D có phương trình :

A) $x - 2y + 5 = 0$. B) $x + 2y - 3 = 0$.

C) $x + 2y + 1 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 43. Cho $A(4 ; 7)$ và $B(2 ; 2)$. Đường thẳng d đi qua B và cách A một đoạn bằng 2 có phương trình :

A) $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 20x - 21y + 2 = 0. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} x - 2 = 0 \\ 21x - 20y - 2 = 0. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 21x + 20y - 2 = 0. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} x + 2 = 0 \\ 20x + 21y + 2 = 0. \end{array}\right.$

Câu 44. Tập hợp những điểm $M(x ; y)$ cách đường thẳng $D : y = 2x + 3$ một đoạn bằng 2 gồm hai đường thẳng có phương trình :

A) $y = 2x - 3 + \sqrt{5}$ và $y = 2x - 3 - \sqrt{5}$.

B) $y = 2x - 3 + \sqrt{3}$ và $y = 2x - 3 - \sqrt{3}$.

C) $y = 2x + 2\sqrt{5}$ và $y = 2x - 2\sqrt{5}$.

D) $y = 2x - 3 + 2\sqrt{5}$ và $y = 2x - 3 - 2\sqrt{5}$.

Câu 45. Phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng $D : 2x + 3y - 1 = 0$ và $D' : 4x - 6y + 5 = 0$ gồm hai đường thẳng có phương trình :

A) $x = -\frac{3}{4}$ và $y = \frac{7}{6}$. B) $x = -\frac{3}{8}$ và $y = \frac{7}{12}$.

C) $x = \frac{3}{4}$ và $y = -\frac{7}{6}$. D) $x = \frac{3}{8}$ và $y = -\frac{7}{12}$.

Câu 46. Phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng $(D) : \frac{x}{3} - \frac{y}{4} = 1$ và $D' : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ gồm hai đường thẳng có phương trình :

A) $x + 3y + 2 = 0$ và $9x - 3y - 22 = 0$.

B) $x = 2$ và $y = \frac{5}{2}$.

C) $x - 3y + 2 = 0$ và $9x + 3y + 22 = 0$.

D) $x = -2$ và $y = -\frac{5}{2}$.

Câu 47. Đường thẳng $d : ax + by + c = 0$ chia mặt phẳng thành hai miền (không kể bờ), đặt $f(x;y) = ax + by + c$. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) Nếu $f(x;y) > 0$ và $c > 0$ thì tập hợp những điểm $M(x;y)$ là miền chứa gốc tọa độ O.

B) Nếu $f(x;y) < 0$ và $C < 0$ thì d không cắt đoạn OM (với $M(x;y)$).

C) Nếu $f(x_A;y_A).f(x_B,y_B) < 0$ thì hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ ở khác miền.

D) Nếu $f(x_A;y_A).f(x_B;y_B) > 0$ thì hai điểm $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ cùng miền với $O(0;0)$.

Câu 48. Đường thẳng $d : 2x - 3y - 16 = 0$ chia mặt phẳng (Oxy) làm hai miền (không kể bờ) và hai điểm $A(7;0)$, $B(4;-3)$. Đặt $f(x;y) = 2x - 3y - 16$. Câu nào sau đây sai ?

A) $f(7;0) = -2$.

B) $A(7;0)$ và $O(0;0)$ cùng miền.

C) A và B ở khác miền.

D) d không cắt đoạn AB.

Câu 49. Cho tam giác ABC ; các đường thẳng AB, AC lần lượt có phương trình $3x + 4y + 5 = 0$ và $5x - 12y + 16 = 0$, với $x_B = 5$, $x_C = 4$. Đường phân giác trong của góc A có phương trình là :

A) $64x - 8y + 145 = 0$.

B) $64x + 8y + 145 = 0$.

C) $14x + 112y - 15 = 0$.

D) một phương trình khác.

Câu 50. Cho tam giác ABC với $A(5;4)$, $B(0;3)$, $C(4;-1)$. Phân giác trong của góc A có phương trình là :

A) $x + y - 1 = 0$.

B) $x - y - 1 = 0$.

C) $x - y + 1 = 0$.

D) một phương trình khác.

ĐÁP ÁN

1. C	2. D	3. A	4. B	5. A
6. C	7. B	8. D	9. A	10. C
11. D	12. B	13. B	14. A	15. D
16. C	17. D	18. C	19. B	20. A
21. B	22. D	23. C	24. A	25. D

26. A	27. B	28. C	29. C	30. D
31. B	32. C	33. D	34. A	35. C
36. A	37. B	38. A	39. C	40. D
41. A	42. C	43. B	44. D	45. B
46. A	47. D	48. D	49. C	50. B

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. $(4;-2)=2(2;-1)\Rightarrow \vec{n}=(2;-1)$ là vectơ pháp tuyến của d. Chọn C

Câu 2. $\vec{n}=(\sqrt{2};2)$ là vectơ pháp tuyến của $d\Rightarrow \overrightarrow{n_1}=-\vec{n}$ và $\overrightarrow{n_2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\vec{n}$ đều là vectơ pháp tuyến của d. Chọn D

Câu 3. $d:3(x-1)+4(y+2)=0\Leftrightarrow 3x+4y+5=0$. Chọn A

Câu 4. $\overrightarrow{BC}=(6;3)$. Đường cao AH có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1)$ và qua $A(3;-2)$ nên có phương trình :

$$2(x-3)+1(y+2)=0\Leftrightarrow 2x+y-4=0.$$ Chọn B

Câu 5. $\overrightarrow{MN}=(1;-2)$ là vectơ pháp tuyến. Trung điểm của MN là $P\left(\dfrac{9}{2};0\right)$

(Δ) có phương trình :

$$1\left(x-\frac{9}{2}\right)-2(y-0)=0\Leftrightarrow x-2y-\frac{9}{2}=0.$$ Chọn A

Câu 6. $y=2(x-3)-2\Rightarrow y=2x-8$. Chọn C

Câu 7. $x=0\Rightarrow y=-10\Rightarrow M(0;-10)$. Chọn B

Câu 8. $d:y=2(x-1)+3=2x+1$, qua điểm $P(0;1)$. Chọn D

Câu 9. $k=\tan 60^0=\sqrt{3}$, $b=7\Rightarrow y=\sqrt{3}x+7$. Chọn A

Câu 10. Đường thẳng vuông góc với $y=2x+5$ phải có hệ số góc $k=-\dfrac{1}{2}$.
Vậy câu C sai. Chọn C

Câu 11. $\dfrac{x}{10}+\dfrac{y}{5}=1\Leftrightarrow x+2y-10=0$. Chọn D

Câu 12. $\vec{n}=(3;4)$ nên $\vec{a}=(4;3)$ thì $\vec{n}.\vec{a}=12+12=24\neq 0$ (sai). Chọn B

Câu 13. $\begin{cases}x=3+2t\\ y=-6-t\end{cases}(t\in\mathbb{R})$. Chọn B

Câu 14. Đường thẳng qua $A(1;1)$ và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC}=(5;2)$.

Chọn A

Câu 15. $\tan\alpha = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^0$. Chọn D

Câu 16. Đường thẳng qua A và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{AB} = (4;3): \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Đường thẳng qua B và có vectơ chỉ phương

$$\overrightarrow{BA} = (-4;-3): \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 5 - 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Vậy I và II đều là phương trình tham số của đường thẳng AB. Chọn C

Câu 17. $t = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A \in d$; $t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B \in d$

$t = 3 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -5 \end{cases} \Rightarrow C \in d$. Chọn D

Câu 18. Hai đường thẳng $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 3 - 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $\begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 3 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$. Có hai vectơ chỉ phương lần lượt là $\vec{u} = (4;-2)$ và $\vec{u'} = (-2;4)$. Không cùng phương nên không thể trùng nhau. Chọn C

Câu 19. $AM = \sqrt{(-t)^2 + (t+4)^2} = \sqrt{2t^2 + 8t + 16}$.

AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow 2t^2 + 8t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = -2$. Chọn B

Câu 20. $AH \perp \mathrm{d}(\mathrm{H} \in \mathrm{d}) \Rightarrow AH = \min AM$ với $M(3-t;2+t) \in d$.

$AH = \min\sqrt{2t^2 + 8t + 16}$ xảy ra khi $t = -2 \Rightarrow H(5;0)$. Chọn A

Câu 21. Hai đường thẳng d và d' cắt nhau khi và chỉ khi :

$$\frac{m-1}{1} \neq \frac{1}{m+1} \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 1 \Leftrightarrow m \neq \pm\sqrt{2}.$$ Chọn B

Câu 22. d và d' cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{a} = (m+2;m)$ và $\vec{b} = (-m;m-3)$: không cùng phương $\Leftrightarrow (m+2)(m-3) + m^2 \neq 0 \Leftrightarrow 2m^2 - m - 6 \neq 0$

$$\Leftrightarrow m \neq 2 \text{ và } m \neq -\frac{3}{2}.$$ Chọn D

Câu 23. Câu A) $\frac{3}{6} = \frac{1}{2} \neq \frac{5}{-9} \Rightarrow d \,//\, d'$;

Câu B) $\frac{4}{4} \neq \frac{-3}{3} \Rightarrow d$ cắt d';

Câu D) $d \,//\, y'Oy$ và $d' // x'ox \Rightarrow d$ cắt d'. Chọn C

Câu 24. Phương trình tổng quát của d_1 và d_2 đều là $x + y - 4 = 0$ nên d_1 và d_2 trùng với d.
Chọn A

Câu 25. d_1 và d_2 có cùng vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a\,;b)$ nên :

* Nếu $M_0(x_0;y_0) \in d_2$ $M_0(x_0;y_0) \in d_1 \Rightarrow d_1$ và d_2 có điểm chung nên $d_1 \equiv d_2 \Rightarrow$ I đúng.

* Nếu $M_1(x_1;y_1) \in d_1$ thì d_1, d_2 không thể trùng nhau $\Rightarrow d_1 \,//\, d_2 \Rightarrow$ II đúng.
Chọn D

Câu 26. d_1 và d_2 có điểm chung là $M_0(2;3)$ nên d_1, d_2 trùng nhau khi $\dfrac{a}{3} = \dfrac{-5}{10} \Leftrightarrow a = -\dfrac{3}{2}$.
Chọn A

Câu 27. Ta có : $\begin{cases} 4x = 8 - 12t \\ 3y = 9 + 12t \end{cases} \Rightarrow 4x + 3y - 17 = 0$.
Chọn B

Câu 28. $d : \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = -3 + 7t \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{-4} = \dfrac{y+3}{7} \Leftrightarrow 7x + 4y - 2 = 0$.
Chọn C

Câu 29. $d : 2x - 3y + 12 = 0$ (*) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (2;-3)$ nên có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;2)$ (loại A).

Thế $M_0(-3;2)$ vào (*) thỏa mãn.
Chọn C

Ghi chú. Chỉ cần thử hai điểm $M_0(-3;2)$ và $M_1(-6;4)$ có thuộc d không ?! Khi $M_0(-3;2) \in d$ thì không cần thử M_1.

Câu 30. $(d) : \dfrac{x}{4} + \dfrac{y}{5} = 1$ qua $A(4;0)$ và $B(0;5)$ nên có vectơ chỉ phương là : $\overrightarrow{AB} = (-4;5)$ nên $\begin{cases} x = 4 + 4t \\ y = 5t \end{cases}$ không thể là phương trình tham số của d (vì $\dfrac{4}{-4} \neq \dfrac{5}{5}$).
Chọn D

Câu 31. Câu B

Câu 32. d có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;3)$ nên có hệ số góc là $\dfrac{3}{4}$.
Chọn C

Câu 33. d có phương trình tổng quát là $x - y - 1 = 0$. $C \in d \Rightarrow C(x;x-1)$.

ΔABC cân tại đỉnh B khi và chỉ khi :

$$BC = BA \Leftrightarrow (x-5)^2 + (x-2)^2 = (5-1)^2 + (1-2)^2$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 - 14x + 12 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=6 \Rightarrow y=5. \end{array}\right.$$ Chọn D

Câu 34. $\cos\alpha = \dfrac{|2.1+1.3|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{9+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^0$. Chọn A

Câu 35. Gọi k là hệ số góc của $D \Rightarrow D: y = k(x-2)+1$ hay $(D)\,kx - y - 2k + 1 = 0$. Ta có :

$$\cos 45^0 = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|3k-1|}{\sqrt{k^2+1}\sqrt{9+1}} \Leftrightarrow 5k^2+5 = 9k^2-6k+1$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 - 3k - 2 = 0.$$

Vậy $\left[\begin{array}{l} k=2 \Rightarrow (D): 2x-y-3=0 \\ k=-\dfrac{1}{2} \Rightarrow (D): x+2y-4=0. \end{array}\right.$ Chọn C

Câu 36. $(d): 4x+3y+12=0$ và $d': mx+2y-m-4=0$ tạo với nhau một góc 45^0 nên :

$$\frac{|4m+6|}{\sqrt{16+9}.\sqrt{m^2+4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2\left(16m^2+48m+36\right) = 25m^2+100$$

$$\Leftrightarrow 7m^2+96m-28=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-14 \\ m=\dfrac{2}{7}. \end{array}\right.$$ Chọn A

Câu 37. $d(M,d) = \dfrac{|3.2+4.9+10|}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{52}{5}$. Chọn B

Câu 38. Phương trình tổng quát của $\Delta: 12(x-2)+5(y-4)=0$

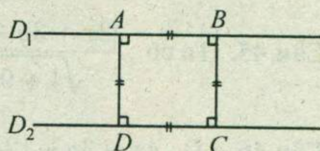
hay $\Delta: 12x+5y-44=0$.

$d(A,\Delta) = \dfrac{|36-5-44|}{\sqrt{144+25}} = 1$. Chọn A

Câu 39. $M(x;0) \in D_2 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2} \Rightarrow M\left(\dfrac{1}{2};0\right)$

$d(D_1;D_2) = d(M;D_1) = \dfrac{\left|12x\dfrac{1}{2} - 0 + 7\right|}{\sqrt{144+25}} = 1$. Chọn C

Câu 40. Nhận xét $D_1 // D_2$ và cạnh hình vuông bằng khoảng cách từ 1 điểm $M \in D_1$ đến D_2 lấy $M(8;0) \in D_1$



$\Rightarrow d(M;D_2) = \dfrac{|2.8 + 3.0 - 3|}{\sqrt{144 + 25}} = 1$.

Vậy, diện tích hình vuông là $S = 1.1 = 1$ (đơn vị diện tích). Chọn D

Câu 41. $M(x;y) \in D; d(M, D_1) = d(M, D_2) \Leftrightarrow \dfrac{|3x - 2y + 6|}{\sqrt{9+4}} = \dfrac{|3x - 2y - 2|}{\sqrt{9+4}}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x - 2y + 6 = 3x - 2y - 2 \text{(loại)} \\ 3x - 2y + 6 = -3x + 2y + 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow 3x - 2y + 2 = 0$. Chọn A

Câu 42. Phương trình tổng quát của $D_1 : x + 2y + 4 = 0$. Phương trình tổng quát của $D_2 : x + 2y - 2 = 0$. Vì $D_1 // D_2$ nên :

$d(M, D_1) = d(M, D_2) \Leftrightarrow x + 2y + 1 = 0$ tương tự câu 41). Chọn C

Ghi chú : Học sinh nên làm kĩ và nhớ kết quả bài toán sau (sẽ trả lời câu 41, 42 nhanh chóng). Chứng minh rằng đường thẳng song song và cách đều hai đường thẳng $D_1 : A_x + B_y + C = 0$ và $D_2 : A_x + B_y + D = 0$ có phương trình $A_x + B_y + \dfrac{C + D}{2} = 0$.

Câu 43. Đường thẳng d đi qua $B(2;2)$ có phương trình

$$m(x-2) + n(y-2) = 0 \text{ (với } m^2 + n^2 \neq 0)$$

hay
$$mx + ny - 2m - 2n = 0.$$

$d(A, d) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{|2m + 5n|}{\sqrt{m^2 + n^2}} = 2$

$\Leftrightarrow 21n^2 + 20mn = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 0 \\ 21n + 20m = 0. \end{array}\right.$

Với $n = 0 \Rightarrow$ chọn $m = 1 \Rightarrow d : x - 2 = 0$.

Với $21n + 20m = 0$, chọn $m = 21, n = -20 \Rightarrow 21x - 20y - 2 = 0$.

Chọn B

Câu 44. $D : y = 2x - 3 \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$.

$d(M, D) = \dfrac{|2x - y - 3|}{\sqrt{4 + 1}} = 2$

$\Leftrightarrow 2x - y - 3 = \pm 2\sqrt{5} \Leftrightarrow y = 2x - 3 \mp 2\sqrt{5}$. Chọn D

Câu 45. Ta có : $\dfrac{|2x+3y-1|}{\sqrt{4+9}} = \dfrac{|4x-6y+5|}{\sqrt{16+36}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{8} \\ y = \dfrac{7}{12}. \end{array}\right.$ Chọn B

Câu 46. $D : 4x - 3y - 12 = 0$, $D' : x - 2 = 0$.

$$\frac{|4x-3y-12|}{\sqrt{16+9}} = \frac{|x-2|}{\sqrt{1+0}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x-3y-12 = 5x-10 \\ 4x-3y-12 = -5x+10 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+3y+2 = 0 \\ 9x-3y-22 = 0. \end{array}\right.$$ Chọn A

Câu 47. Nếu $f(x_A;y_A).f(x_B;y_B) > 0$ thì $A(x_A;y_A)$ và $B(x_B;y_B)$ ở cùng miền (tức là đồng thời ở cùng miền, hoặc đồng thời ở trái miền với gốc tọa độ O). Chọn D

Câu 48. $f(7;0) = -2 < 0$ và $f(4;-3) = 1 > 0$ nên A, B ở khác miền do đó d cắt đoạn AB. Chọn D

Câu 49. $x_B = 5 \Rightarrow y_B = \dfrac{-5-3x_B}{4} = -5 \Rightarrow B(5;-5)$. Tương tự $C(4;3)$.

Phương trình các đường phân giác của góc A :

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{3x+4y+5}{\sqrt{9+16}} = \dfrac{5x-12y+16}{\sqrt{25+144}} & (1) \\ \dfrac{3x+4y+5}{\sqrt{9+16}} = -\dfrac{5x-12y+16}{\sqrt{25+144}}. & (2) \end{array}\right.$$

$(1) \Leftrightarrow 39x + 52y + 65 = 25x - 60y + 80 \Leftrightarrow 14x + 112y - 15 = 0$.

Đặt $f(x;y) = 14x + 112y - 15$. Ta có :

$f(5;-5) = 14.5 + 112(-5) - 15 < 0$,

$f(4;3) = 14.4 + 112.3 - 15 > 0$,

$f(x_B;y_B).f(x_C;y_C) < 0 \Rightarrow 14x + 112y - 15 = 0$ là phương trình phân giác trong của góc A; còn (2) cho ta phân giác ngoài. Chọn C

Câu 50. $AB = \sqrt{(0-5)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{26}$ và

$AC = \sqrt{(4-5)^2 + (-1-4)^2} = \sqrt{26}$.

Tam giác ABC cân đỉnh A. Vậy, phân giác trong của góc A là đường thẳng qua $A(5;4)$ và qua $M(2;1)$ (M là trung điểm của BC) nên có phương trình :

$$\frac{x-2}{5-2} = \frac{y-1}{4-1} \Leftrightarrow x - y - 1 = 0.$$ Chọn B

Chuyên đề 6.

ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. Phương trình đường tròn

- Đường tròn (C) tâm $I(a;b)$ bán kính R có phương trình là :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \quad (1)$$

Hoặc

$$\begin{cases} x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \\ a^2+b^2-c=R^2>0 \end{cases} \quad (2)$$

II. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

- Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)\in(C)$ là :

* $(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=R^2$ (3)

* hoặc :

$x_0x+y_0y-a(x_0+x)-b(y_0+y)+c=0$ (4)

- Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ bán kính R và đường thẳng

$$\Delta: Ax+By+C=0.$$

Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=R \quad (5)$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. XÁC ĐỊNH TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

- Dùng các công thức (1) hoặc (2) để tìm a,b và R.

Ví dụ 1. Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của đường tròn. Xác định tâm và bán kính nếu có :

a) $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 16 = 0$. (1)

b) $(x-3)^2 + (y+4)^2 = 40$. (2)

c) $2x^2 + 2y^2 - 3x - 2 = 0$. (3)

d) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$. (4)

Giải

a) Ta có : $a = 2.\ b = -\dfrac{5}{2}$ và $c = 16$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c = 4 + \frac{25}{4} - 16 = -\frac{23}{4} < 0.$$

Vậy $x^2 + y^2 - 4x + 5y + 16 = 0$ không phải là phương trình đường tròn.

b) $a = 3, b = -4, R^2 = 40 \Rightarrow R = 2\sqrt{10}$.

Vậy (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(3;-4)$ và bán kính $R = 2\sqrt{10}$.

c) (3) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{3}{2}x - 1 = 0$. Do đó $a = \dfrac{3}{4}, b = 0, c = -1$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 - c = \frac{9}{16} + 1 = \frac{25}{16} > 0.$$

Vậy (3) là phương trình đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{3}{4};0\right)$ và bán kính $R = \dfrac{5}{4}$.

d) (4) $\Leftrightarrow x^2 + y^2 - \dfrac{5}{2}x - 2y + \dfrac{1+m^2}{2} = 0$

$$a = +\frac{5}{4}, b = +1, c = \frac{1+m^2}{2} \Rightarrow a^2 + b^2 - c = \frac{25}{16} + 1 - \frac{1+m^2}{2}$$

$$= \frac{41}{16} - \frac{1+m^2}{2}.$$

• Nếu $a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow m^2 < \dfrac{33}{8} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{33}{8}} < m < \sqrt{\dfrac{33}{8}}$ thì (4) là phương trình đường tròn có tâm $I\left(\dfrac{5}{4};1\right)$ và bán kính $R = \dfrac{1}{4}\sqrt{33 - 8m^2}$.

• Nếu $|m| \geq \dfrac{33}{8}$ thì (4) không phải là phương trình đường tròn.

Ví dụ 2. Cho đường tròn $x^2 + y^2 + (m-15)x - (m-5)y + m = 0$. Tìm tập hợp tâm đường tròn khi m thay đổi.

Giải

Ta có : $a = -\dfrac{m-15}{2}$, $b = \dfrac{m-5}{2}$ và $c = m$.

Do đó : $a^2 + b^2 - c = \dfrac{1}{2}(m^2 - 22m + 125) > 0$ với mọi m.

Suy ra tâm I có tọa độ $\left(x = \dfrac{15-m}{2}; y = \dfrac{m-5}{2}\right)$. Khử m ta được $x + y - 5 = 0$. Vậy, tập hợp I là đường thẳng $x + y - 5 = 0$.

Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

- Sử dụng các công thức (1) và (2) để tìm a, b, R hoặc a, b, c.
- Sử dụng "tập hợp điểm là đường tròn".

Ví dụ 1. Tìm phương trình đường tròn :

a) Có đường kính AB với $A(7;5)$, $B(1;1)$.

b) Ngoại tiếp tam giác ABC có $A(5;5)$, $B(6;-2)$, $C(-2;4)$.

Giải

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (-6;-4) \Rightarrow R = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{52}$ và tâm I là trung điểm $AB \Rightarrow I(4;3)$. Vậy, phương trình đường tròn là $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 13$.

Cách khác : Đường tròn là tập hợp các điểm M sao cho :

$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \text{ với } M(x;y)$$

$$\Leftrightarrow (7-x)(1-x) + (5-y)(1-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0.$$

Vậy, phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 12 = 0$.

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$.

Đường tròn qua A, B, C nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4a - 8b + c + 20 = 0 \\ -10a - 10b + c + 50 = 0 \\ -12a + 4b + c + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -20. \end{cases}$$

Vậy, phương trình đường tròn là $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.

Ví dụ 2. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm thuộc đường thẳng $3x-5y-8=0$.

Giải

Đường tròn tâm $I(a;b)$ và bán kính R có phương trình

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \quad (1)$$

Đường tròn tiếp xúc với Ox và $Oy \Leftrightarrow |a|=|b|=R$.

Do đó : $(1) \Leftrightarrow (x-a)^2+(y-b)^2=a^2$.

Đường tròn có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $3x-5y-8=0$, tưc là :

$$3a-5b-8=0. \quad (2)$$

- Với $a=b \Rightarrow (2) \Leftrightarrow a=-4 \Rightarrow b=-4, R=4$, ta được đường tròn :

$$(x+4)^2+(y+4)^2=16.$$

- Với $a=-b \Rightarrow (2) \Leftrightarrow a=1 \Rightarrow b=-1, R=1$, ta được đường tròn :

$$(x-1)^2+(y+1)^2=1.$$

Dạng 3. TIẾP TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Phương pháp

- Nếu biết tiếp điểm là $M_0(x_0;\ y_0)$ thì dùng các công thức (3) hoặc (4).
- Nếu tiếp tuyến qua điểm A không thuộc đường tròn thì sử dụng công thức (5).

Ví dụ 1. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+4x-4y+3=0$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C) trong các trường hợp sau :

a) Tiếp điểm là các giao điểm của (C) với trục Ox.

b) Tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;2)$.

Giải

a) Giao điểm của (C) với Ox là hai điểm $B(-1;0)$, $C(-3;0)$. Tiếp tuyến tại B có phương trình là :

$$x_Bx+y_By+2(x_B+x)-2(y_B+y)+3=0 \Leftrightarrow +x-2y+1=0.$$

Suy ra tiếp tuyến tại C có phương trình là $x+2y+3=0$.

b) Vì $A(1;2)$ không thuộc đường tròn. Đường thẳng Δ qua A có hệ số góc k là :

$$y-2=k(x-1) \Leftrightarrow kx-y+2-k=0.$$

Δ tiếp xúc đường tròn $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$. (1)

Mà $I(-2;2)$ và $R=\sqrt{5}$. Suy ra :

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left|-2k-2+2-k\right|}{\sqrt{k^2+1}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|-3k\right|^2 = 5(k^2+1)$$

$$\Leftrightarrow 4k^2 = 5 \Leftrightarrow k = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

- Với $k = \frac{\sqrt{5}}{2}$ ta có tiếp tuyến $\sqrt{5}x - 2y + 4 - \sqrt{5} = 0$.
- Với $k = -\frac{\sqrt{5}}{2}$ ta có tiếp tuyến $\sqrt{5}x + 2y - 4 - \sqrt{5} = 0$.

Ví dụ 2. Tìm phương trình tiếp tuyến chung của 2 đường tròn:

$(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 16y + 79 = 0$

$(C_2): x^2 + y^2 - 12x - 8y + 43 = 0$

Giải

(C_1) có tâm $I_1(4;8)$, bán kính $R_1 = 1$, (C_2) có tâm $I_2(6;4)$; bán kính $R_2 = 3$. Suy ra $I_1I_2 = 2\sqrt{5} > R_1 + R_2 = 4$, nên (C_1) và (C_2) ngoài nhau. Do đó, có 4 tiếp tuyến chung.

a) Xét $(\Delta): y = ax + b \Leftrightarrow ax - y + b = 0$.

Ta có : $d(I_1;\Delta) = R_1$ và $d(I_2;\Delta) = R_2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |4a - 8 + b| = \sqrt{a^2+1} \\ |6a - 4 + b| = 3\sqrt{a^2+1} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} 9a + 2b = 14 & (1) \\ 3a + b = 10. & (2) \end{array}\right.$$

- Từ (1) $\Rightarrow |a+2| = 2\sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow 3a^2 - 4a = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = \frac{4}{3}. \end{array}\right.$

$+\ a = 0 \Rightarrow b = 7 \Rightarrow \Delta_1 : y - 7 = 0;$

$+\ a = \frac{4}{3} \Rightarrow b = 1 \Rightarrow \Delta_2 : 4x - 3y + 3 = 0.$

- Từ (2) $\Rightarrow |a+2| = \sqrt{a^2+1} \Leftrightarrow a = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow b = \frac{49}{4}$

$$\Rightarrow \Delta_3 : 3x + 4y - 49 = 0.$$

b) Xét $(\Delta) // Oy \Rightarrow$ phương trình $\Delta : x = m$. Ta có :

$$\begin{cases} d(I_1,\Delta) = R_1 \\ d(I_2,\Delta) = R_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |6 - m| = 3 \\ |4 - m| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3\ hay\ m = 9 \\ m = 3\ \ hay\ m = 5 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $(\Delta_4): x - 3 = 0$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường tròn (C) tâm I, bán kính R, kí hiệu $C(I,R)$, và điểm M. Mệnh đề nào sau đây đúng ?

I. $M \in C(I,R) \Leftrightarrow IM = R$;

II. $M \notin C(I,R) \Leftrightarrow IM \neq R$.

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) I và II. D) I và II đều sai.

Câu 2. Cho đường tròn $C(I,R)$ và điểm M. Xét ba mệnh đề sau :

I. $M \in C(I,R) \Leftrightarrow IM = R$;

II. M ở ngoài $C(I,R) \Leftrightarrow IM < R$;

III. M ở trong $C(I,R) \Leftrightarrow IM > R$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Cả I, II và III.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây sai ?

A) Đường tròn tâm O (O : gốc tọa độ), bán kính R có phương trình :

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

B) Đường tròn tâm $I(a;b)$, bán kính R có phương trình :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

C) $M(x;y) \in C(I,R)$ với $I(a;b) \Rightarrow x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với

$$c = a^2 + b^2 - R^2.$$

D) $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$.

Câu 4. $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 7$ là phương trình đường tròn có :

A) Tâm I $(-2;4)$ và bán kính $R = \sqrt{7}$.

B) Tâm I $(2;-4)$ và bán kính $R = \sqrt{7}$.

C) Tâm I $(2;-4)$ và bán kính $R = 7$.

D) Tâm I $(2;-4)$ và bán kính $R = 49$.

Câu 5. Phương trình nào sau đây không phải là phương trình đường tròn ?

A) $x^2 + y^2 - 104x + 72y - 50 = 0$.

B) $x^2 + y^2 - 43x + 71y - 8 = 0$.

C) $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$.

D) $x^2 + y^2 + 6x + 15 = 0$.

Câu 6. Câu nào sau đây sai ?

A) Đường tròn $x^2 + y^2 = 49$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = 7$.

B) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ có tâm $I(2;0)$, bán kính $R = 1$.

C) Đường tròn $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ có tâm $I(3;4)$, bán kính $R = 5$.

D) Đường tròn $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$ có tâm $I(2;1)$, bán kính $R = 3$.

Câu 7. Đường tròn $C(I,R)$ với $I(-8;4)$ và $R = 10$ có phương trình :

A) $(x+8)^2 + (y-4)^2 = 100$. B) $(x-8)^2 + (y+4)^2 = 100$.

C) $(x-8)^2 + (y+4)^2 = 10$. D) $(x+8)^2 + (y-4)^2 = 20$.

Câu 8. Câu nào sau đây đúng ?

A) Đường tròn tâm $I(3;1)$, bán kính $R = 4$ có phương trình :

$$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 16.$$

B) Đường tròn tâm $I(1;-2)$, bán kính $R = 3$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0.$$

C) Đường tròn tâm $I(0;-5)$, bán kính $R = 4$ có phương trình :

$$x^2 + (y-5)^2 = 16.$$

D) Đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};0\right)$, bán kính $R = 6$ có phương trình :

$$x^2 + y^2 - 3x + \frac{135}{9} = 0.$$

Câu 9. Cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Điểm nào sau đây nằm trên đường tròn $M(5;5)$, $N(4;-2)$, $P(3;7)$, $Q(1;-3)$?

A) Chỉ M. B) Chỉ N. C) Chỉ M và P. D) M, N và Q.

Câu 10. Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 8x - 6y - 24 = 0$. Câu nào sau đây sai ?

A) Đường tròn (C) có tâm $I(-4;3)$ và bán kính $R = 7$.

B) Điểm $M(2;1)$ ở ngoài đường tròn (C).

C) Điểm $N(3;3) \in (C)$.

D) Điểm $Q(-2;2)$ ở trong đường tròn (C).

Câu 11. Đường tròn $(C): (x-2)^2 + (y-m)^2 = 5 + 4m - m^2$ với $-1 < m < 5$ có bán kính lớn nhất khi :

A) $m = 4$. B) $m = 1$. C) $m = 2$. D) $m = 3$.

Câu 12. Đường tròn $(C): (x+4)^2 + (y-3m)^2 = 18 + 6m + m^2$ có chu vi nhỏ nhất khi :

A) $m = -3$. B) $m = 0$. C) $m = 1$. D) $m = -4$.

Câu 13. Với giá trị nào của m thì : $(x-m)^2 + y^2 = 4m^2 + 4m + 3$ là phương trình của đường tròn :

A) $m = 3$. B) $m = 5$. C) $m = -2$. D) $\forall m \in \mathbb{R}$.

Câu 14. Chu vi của đường tròn $(x-m)^2 + y^2 = 4m^2 + 4m + 3$ nhỏ nhất thì tâm I của đường tròn đó là :

A) $I\left(-\frac{1}{2};0\right)$. B) $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.

C) $I(2;0)$. D) Một điểm khác.

Câu 15. $x^2 + y^2 - 2mx + 6y - 8m + 2 = 0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi :

A) $m < -4$ hoặc $m > 2$. B) $-4 < m < 2$.

C) $m < -7$ hoặc $m > -1$. D) $-7 < m < -1$.

Câu 16. Đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 6y + 2m^2 - 2m + 6 = 0$ có bán kính lớn nhất là :

A) 1. B) 2. C) 3. D) $\frac{5}{2}$.

Câu 17. Đường tròn (C) tâm $I(1;-2)$ ngoại tiếp hình vuông cạnh a có phương trình :

A) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 2a^2$. B) $(x+1)^2 + (y-2)^2 = \frac{a^2}{2}$.

C) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2a^2$. D) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Câu 18. Đường tròn (C) tâm $I(0;3)$ ngoại tiếp lục giác đều cạnh $m\,(m > 0)$ có phương trình :

A) $x^2 + y^2 + 3y + 9 - m = 0$. B) $x^2 + y^2 + 6y + 9 - m^2 = 0$.

C) $x^2 + y^2 - 3y + 9 - m = 0$. D) $x^2 + y^2 - 6y + 9 - m^2 = 0$.

Câu 19. Đường tròn (C) tâm $I(4;5)$ và có cùng bán kính với đường tròn $(C'): x^2 + y^2 - 2x + 10y + 10 = 0$ thì (C) có phương trình là :

A) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$. B) $x^2 + y^2 - 8x - 10y + 16 = 0$.

C) $x^2 + y^2 + 8x + 10y + 25 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 20. Đường tròn (C) có bán kính $R = 6$ và cùng tâm với đường tròn $(C'): x^2 + y^2 + 4x - 12 = 0$ thì (C) có phương trình là :

A) $(x+2)^2+y^2=6$. B) $(x+2)^2+y^2=36$.

C) $(x-2)^2+y^2=36$. D) một phương trình khác.

Câu 21. Mệnh đề nào sau đây sai ?

Phương trình của đường tròn (C)

A) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=\sqrt{3}$ là : $x^2+y^2-3=0$.

B) có tâm $I(3;0)$ và bán kính $R=4$ là : $(x-3)^2+y^2=16$.

C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=3$ là : $x^2+y^2-4x+2y+4=0$.

D) có tâm $I(1;4)$ và bán kính $R=2$ là : $x^2+y^2-2x+8y+13=0$.

Câu 22. Xét các mệnh đề sau :

Phương trình đường tròn (C) có :

I. Tâm $I(3;4)$ và tiếp xúc với $x'Ox$ là : $(x-3)^2+(y-4)^2=16$.

II. Tâm $I(-3;4)$ và tiếp xúc với $y'Oy$ là : $x^2+y^2+6x-8y=0$.

III. Tâm $I(2;5)$ và qua gốc tọa độ O là : $x^2+y^2-4x-10y=0$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) I và II. B) I và III. C) II và III. D) Cả I, II, III.

Câu 23. Đường tròn (C) tiếp xúc với trục $x'Ox$ tại điểm $A(3;0)$ và qua $B(2;2)$ có phương trình là :

A) $x^2+y^2-6x-5y+9=0$. B) $x^2+y^2-6x-\frac{5}{2}y-9=0$.

C) $x^2+y^2-6x-\frac{5}{2}y+9=0$. D) một phương trình khác.

Câu 24. Đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ nằm trên đường thẳng $x+2y-2=0$ và qua hai điểm $A(5;4)$, $B(-2;3)$. Phương trình của (C) là :

A) $x^2+y^2-4x-21=0$. B) $x^2+y^2-6x+4y-21=0$.

C) $x^2+y^2+4x+21=0$. D) một phương trình khác.

Câu 25. Đường tròn (C) qua ba điểm $M(4;-2)$, $N(-4;4)$, $P(-4;4)$ có phương trình là :

A) $x^2+y^2-2y-24=0$. B) $x^2+y^2+2x-24=0$.

C) $x^2+y^2+2y-24=0$. D) một phương trình khác.

Câu 26. Đường tròn (C) qua ba điểm $A(0;4)$, $B(8;4)$, $C(0;10)$ có phương trình là :

A) $(x-4)^2+(y-7)^2=16$. B) $(x-4)^2+(y-10)^2=25$.

C) $(x-4)^2+(y-7)^2=25$. D) một phương trình khác.

Câu 27. Đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $y=5$ và tiếp xúc với $d: x-3y-3=0$ và $D: 3x-y-9=0$ có phương trình :

A) $(x+2)^2+(y-5)^2=40$. B) $(x+8)^2+(y-5)^2=10$.

C) $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2+(y+5)^2=40\\(x-8)^2+(y+5)^2=10.\end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2+(y-5)^2=40\\(x-8)^2+(y-5)^2=10.\end{array}\right.$

Câu 28. Đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $x=-3$ và tiếp xúc với đường thẳng $D: 4x-3y+31=0$ tại điểm $A(-7;1)$ thì (C) có phương trình :

A) $(x-3)^2+(y-2)^2=25$. B) $(x+3)^2+(y+2)^2=25$.

C) $(x-3)^2+(y+2)^2=25$. D) $(x+3)^2+(y+2)^2=16$.

Câu 29. Đường tròn (C) qua hai điểm $A(3;0)$ và $B(-3;0)$ và tiếp xúc với đường thẳng $D: 3x+4y+9=0$ có phương trình :

A) $x^2+(y-3)^2=16$. B) $x^2+(y-4)^2=25$.

C) $x^2+(y+4)^2=25$. D) $x^2+(y+3)^2=16$.

Câu 30. Đường tròn (C) qua điểm $A(2;1)$ và tiếp xúc với 2 trục tọa độ có phương trình là :

A) $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\(x-5)^2+(y-5)^2=25.\end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l}(x-1)^2+(y-1)^2=1\\(x-4)^2+(y-4)^2=16.\end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l}(x-2)^2+(y-2)^2=4\\(x-5)^2+(y-5)^2=25\end{array}\right.$ D) một đáp số khác.

Câu 31. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(3;5)$ của đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$ là :

A) $2x+4y-5=0$. B) $x-2y-13=0$.

C) $x+2y-13=0$ D) một phương trình khác.

Câu 32. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C): (x-2)^2+(y+2)^2=25$ tại điểm $M(5;2)$ là :

A) $3x+4y-15=0$. B) $3x+4y-12=0$.

C) $3x - 4y + 23 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 33. Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 2x - 6y - 90 = 0$ tại điểm $M(5;-5)$ là :

A) $6x - 8y - 65 = 0$. B) $6x + 8y + 10 = 0$.

C) $3x + 4y + 5 = 0$. D) một phương trình khác.

Câu 34. Tiếp tuyến với đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-5)^2 = 1$. Tại các điểm $M \in (C)$ có tung độ bằng 5 có phương trình là :

A) $\left[\begin{array}{l} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} y - 6 = 0 \\ y - 4 = 0. \end{array}\right.$ D) một phương trình khác.

Câu 35. Tiếp tuyến với đường tròn (C) tâm $I(0;2)$, bán kính $R = 5$ và song song với đường thẳng $3x + 4y - 5 = 0$ có phương trình :

A) $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y - 33 = 0 \\ 3x + 4y + 17 = 0. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y - 33 = 0 \\ 3x + 4y - 17 = 0. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} 4x - 3y - 33 = 0 \\ 4x - 3y + 17 = 0. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} 4x - 3y + 33 = 0 \\ 4x - 3y - 17 = 0. \end{array}\right.$

Câu 36. Tiếp tuyến D song song với đường thẳng $\left[\begin{array}{l} x = 1 + 3t \\ y = 5 + 4t \end{array}\right.$ của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4y - 21 = 0$ có phương trình là :

A) $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y - 8 = 0 \\ 3x + 4y + 15 = 0 \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} 3x + 4y + 17 = 0 \\ 3x - 4y - 17 = 0. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} 3x - 3y + 31 = 0 \\ 4x - 3y - 19 = 0. \end{array}\right.$ D) hai phương trình khác.

Câu 37. Với giá trị nào của k thì đường thẳng $D: y = kx + 8$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$?

A) $k = \frac{3}{4} \vee k = -\frac{4}{3}$. B) $k = \frac{4}{3} \vee k = -\frac{3}{4}$.

C) $k = \frac{4}{5} \vee k = -\frac{5}{4}$. D) $k = \frac{5}{4} \vee k = -\frac{4}{5}$.

Câu 38. Với giá trị nào của m thì đường thẳng $x - m = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$?

A) $m = -3$. B) $m = 4$. C) $\left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -5. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 5. \end{array}\right.$

Câu 39. Với giá trị nào của n thì đường thẳng $D: y - n = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$?

A) $\left[\begin{array}{l} n = 2 \\ n = -6. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} n = -2 \\ n = 6. \end{array}\right.$ C) $\left[\begin{array}{l} n = 4 \\ n = -2. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} n = -4 \\ n = 2. \end{array}\right.$

Câu 40. Với giá trị nào của m thì đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 6y + m - 3 = 0$ tiếp xúc với đường thẳng $D: 4x - 3y - 7 = 0$?

A) $m = 4$. B) $m = 5$. C) $m = 6$. D) Một số khác.

Câu 41. Đường thẳng D đi qua điểm $M(2;7)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): (x-3)^2 + y^2 = 25$ có phương trình là :

A) $\left[\begin{array}{l} 4x - 3y - 13 = 0 \\ -3x + 4y + 34 = 0. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} 4x - 3y + 13 = 0 \\ 3x + 4y - 34 = 0. \end{array}\right.$

C) $\left[\begin{array}{l} 4x + 5y - 43 = 0 \\ 5x + 4y - 38 = 0. \end{array}\right.$ D) hai phương trình khác.

Câu 42. Cho hai đường tròn $C_1(I_1, R_1)$ và $C_2(I_2, R_2)$ và hai mệnh đề :

I. $R_1 + R_2 < I_1I_2 \Leftrightarrow C_1(I_1, R_1)$ và $C_2(I_2, R_2)$ có hai tiếp tuyến chung ;

II. $|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2 \Leftrightarrow C_1(I_1, R_1)$ và $C_2(I_2, R_2)$ không có tiếp tuyến chung.

Hỏi mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) Cả hai. D) Không có.

Câu 43. Cho hai đường tròn $C_1(I_1, R_1)$, $C_2(I_2, R_2)$ và ba mệnh đề sau :

I. $R_1 + R_2 = I_1I_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) có ba tiếp tuyến chung ;

II. $|R_1 - R_2| = I_1I_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) có một tiếp tuyến chung ;

III. $|R_1 - R_2| > I_1I_2 \Leftrightarrow (C_1)$ và (C_2) không có tiếp tuyến chung.

Hỏi mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) Chỉ III. D) Cả I, II, III.

Câu 44. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn : $(C_1): x^2 + y^2 = 16$ và $(C_2): (x-3)^2 + (y+4)^2 = 1$ là :

A) 1. B) 2. C) 3. D) 4.

Câu 45. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn : $(C_1): x^2 + y^2 - 8x - 6y = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 6y - 18 = 0$ là :

A) 2. B) 4. C) 3. D) 1.

Câu 46. Hai tiếp tuyến của hai đường tròn $(C_1): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$ và $(C_2): x^2 + (y+1)^2 = 25$ có phương trình là :

A) $\left[\begin{array}{l} x - y + 4 = 0 \\ x - y - 4 = 0. \end{array}\right.$

B) $x - y - 1 \pm 5\sqrt{2} = 0$.

C) $\left[\begin{array}{l} x + y - 5\sqrt{2} = 0 \\ x + y + 5\sqrt{2} = 0. \end{array}\right.$

D) $\left[\begin{array}{l} x + 2y - 9 = 0 \\ x + 2y + 5 = 0. \end{array}\right.$

Câu 47. Các tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): (x-3)^2 + (y-2)^2 = 4$ $(C_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 = 4$ có phương trình :

A) $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 4. \end{array}\right.$ B) $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ y = 4. \end{array}\right.$ C) $\left[\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \\ y = -2. \end{array}\right.$ D) $\left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 4 \\ x = -1. \end{array}\right.$

Câu 48. Tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 6x - 6y = 0$ có phương trình :

A) $x + y = 0$.

B) $x + y - 5 = 0$.

C) $\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 3. \end{array}\right.$

D) $\left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = 3. \end{array}\right.$

Câu 49. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ là :

A) 2. B) 3. C) 4. D) 1.

Câu 50. Cho hai đường tròn : $(C_1): (x-1)^2 + (y+1)^2 = 6$ và $(C_2): x^2 + y^2 - 2x + 2y - 3 = 0$. Câu nào sau đây đúng ?

A) (C_1) và (C_2) có hai tiếp tuyến chung.

B) $x + y \pm \sqrt{2} = 0$ là phương trình của hai tiếp tuyến chung.

C) (C_1) và (C_2) không có tiếp tuyến chung nào cả.

D) (C_2) đi qua gốc tọa độ.

Câu 51. Cho $A(2;2)$ và $B(4;8)$. Tập hợp những điểm M nhìn đoạn AB dưới một góc vuông là đường tròn có phương trình :

A) $(x-3)^2+(y+3)^2=40$. B) $(x+3)^2+(y+6)^2=10$.

C) $(x-1)^2+(y-3)^2=10$. D) $(x-3)^2+(y-5)^2=10$.

Câu 52. Cho $A(1;1)$, $B(5;5)$. Tập hợp những điểm M mà $MA^2+MB^2=24$ là đường tròn có phương trình là :

A) $x^2+y^2+6x+10y+24=0$. B) $(x-3)^2+(y-3)^2=4$.

C) $x^2+y^2-6x-6y+17=0$. D) một phương trình khác.

Câu 53. Cho $A(-8;0)$, $B(-2;0)$. Tập hợp những điểm $M(x;y)$ mà $MA=2MB$ là đường tròn có phương trình :

A) $x^2+y^2=16$. B) $x^2+y^2=64$.

C) $(x-2)^2+y^2=16$. D) $(x+2)^2+y^2=16$.

Câu 54. Cho đường tròn $C(0;2)$ với 0 là gốc tọa độ, điểm $I(4;0)$. Tập hợp những điểm $M(x;y)$ mà $MT^2+MI^2=12$ (MT là tiếp tuyến với (C) vẽ từ M) là :

A) Đường thẳng $x=3$.

B) Đường thẳng $x+y-2=0$.

C) Đường tròn $x^2+y^2=16$.

D) Một cung của đường tròn : $x^2+y^2-4x=0$.

Câu 55. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=4$. Tập hợp những điểm M nhìn (C) dưới một góc 60^0 (tức là góc tạo bởi hai tiếp tuyến với (C) vẽ từ M là 60^0) là :

A) một đường thẳng. B) một đoạn thẳng.

C) đường tròn : $x^2+y^2=16$. D) đường tròn $x^2+y^2=25$.

Câu 56. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2=2$. Tập hợp những điểm $M(x;y)$ nhìn (C) dưới một góc 90^0 là đường tròn có phương trình là :

A) $x^2+y^2=4$. B) $x^2+y^2=8$.

C) $x^2+y^2=16$. D) một phương trình khác.

Câu 57. Cho họ đường tròn $(C_\alpha): x^2+y^2-2(\cos\alpha+3)x-2\sin\alpha.y-2=0$ với $\alpha\in\mathbb{R}$. Tập hợp tâm của (C_α) là :

A) nửa đường tròn . B) phần tư đường tròn.

C) cả đường tròn $(x-3)^2+y^2=1$. D) cả đường tròn: $x^2+y^2=3$.

Câu 58. Họ đường tròn $(C_m): x^2+y^2-2(m-1)x+2y+4m-8=0$ luôn luôn qua điểm cố định :

A) $I(2;0)$ và $J(2;-2)$. B) Chỉ $I(2;0)$.

C) Chỉ $J(2;-2)$. D) $I(-2;0)$ và $J(-2;2)$.

Câu 59. Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-6y+6=0$ và đường thẳng $D: x+y-4=0$ cắt nhau tại A và B. Đường tròn qua $C(1;7)$, A, B có phương trình là :

A) $x^2+y^2+5x+9y+18=0$. B) $x^2+y^2-5x-9y+18=0$.

C) $x^2+y^2-3x-5y+10=0$. D) một phương trình khác.

Câu 60. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-11=0$. Từ điểm $M_0(4;2)$ ở ngoài (C) vẽ hai tiếp tuyến M_0A, M_0B với (C) $(A,B\in(C))$. Đường thẳng AB có phương trình :

A) $3x-4y+11=0$. B) $3x+4y+11=0$.

C) $-3x+4y+11=0$. D) $3x+4y-11=0$.

ĐÁP ÁN

1. C	2. A	3. D	4. B	5. D	6. C	7. A	8. B	9. D	10. B
11. C	12. A	13. D	14. A	15. C	16. B	17. D	18. D	19. A	20. B
21. C	22. B	23. C	24. A	25. A	26. C	27. D	28. B	29. B	30. A
31. C	32. D	33. D	34. B	35. A	36. C	37. B	38. D	39. A	40. D
41. B	42. D	43. D	44. C	45. A	46. B	47. B	48. A	49. C	50. C
51. D	52. B	53. A	54. D	55. C	56. A	57. C	58. A	59. B	60. D

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. I và II đều đúng. Chọn C

Câu 2. Chỉ I đúng. Chọn A

Câu 3. Với điều kiện $a^2+b^2-c>0$ thì $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Chọn D

Câu 4. $(x-2)^2+(y+4)^2=7=(\sqrt{7})^2$ là phương trình đường tròn tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{7}$. Chọn B

Câu 5. Nếu $a \neq 0$ hoặc $b \neq 0$ và $c \leq 0$ thì $a^2 + b^2 - c > 0$ nên ba phương trình đầu tiên chắc chắn là phương trình đường tròn. Chọn D

Câu 6. $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ có $-2a = 6$ và $-2b = 8 \Rightarrow a = -3,\ b = -4$.

Tâm $I(-3;-4)$. Chọn C

Câu 7. $(x-(-8))^2 + (y-4)^2 = 10^2 \Leftrightarrow (x+8)^2 + (y-4)^2 = 100$. Chọn A

Câu 8. $c = a^2 + b^2 - R^2 = 1 + 4 - 9 = -4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$.

Chọn B

Câu 9. $(5-1)^2 + (5-2)^2 = 25 \Rightarrow M \in (C)$,

$(4-1)^2 + (-2-2)^2 = 25 \Rightarrow N \in (C)$,

$(3-1)^2 + (7-2)^2 = 29 \neq 25 \Rightarrow P \notin (C)$,

$(1-1)^2 + (-3-2)^2 = 25 \Rightarrow Q \in (C)$. Chọn D

Câu 10. (C) có tâm $I(-4;3)$, $R = 5$. Ta có :

$$IM = \sqrt{(2+4)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{40} < 7 = R.$$

Vậy $M(2;1)$ ở trong đường tròn (C). Chọn B

Câu 11. Phương trình có dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ với $R^2 = 5 + 4m - m^2$ $\Rightarrow R^2 = 9 - (m-2)^2 \leq 9$. Do đó : R lớn nhất $\Leftrightarrow R^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 2$. Chọn C

Câu 12. $R^2 = 18 + 6m + m^2 = 9 + (m+3)^2 \geq 9$. Đường tròn có chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow R$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow R^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = -3$. Chọn A

Câu 13. $4m^2 + 4m + 3 = 2 + (2m+1)^2 > 0,\ \forall m \in \mathbb{R}$. Chọn D

Câu 14. $R^2 = 4m^2 + 4m + 3 = 2 + (2m+1)^2 \geq 2$. Chu vi nhỏ nhất $\Leftrightarrow R$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow R^2$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$. Tâm của đường tròn là $I(m;0) \Rightarrow I\left(-\frac{1}{2}\,;\,0\right)$. Chọn A

Câu 15. Điều kiện : $a^2 + b^2 - c = m^2 + 9 + 8m - 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m + 7 > 0$. Vậy $m < -7$ hoặc $m > -1$. Chọn C

Câu 16. $R^2 = a^2 + b^2 - c = m^2 + 9 - (2m^2 - 2m + 6)$

$= -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m-1)^2$.

R lớn nhất $\Leftrightarrow R^2$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 1$, khi đó $R^2 = 4 \Rightarrow R = 2$. Chọn B

Câu 17. Đường chéo của hình vuông là $a\sqrt{2}$, bán kính đường tròn ngoại tiếp là $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy phương trình đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y+2)^2 = \frac{a^2}{2}$.

Chọn D

Câu 18. $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với

$c = a^2 + b^2 - R^2 = 0^2 + 3^2 - m^2 = 9 - m^2$ (vì $m = R$).

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 6x + 9 - m^2 = 0$. Chọn D

Câu 19. Bán kính đường tròn (C) và (C') là $R \Rightarrow R^2 = 1 + 25 - 10 = 16$.

Vậy (C) có tâm $I(4;5)$ và $R^2 = 16 \Rightarrow C = 16 + 25 - 16 = 25$.

Phương trình của $(C): x^2 + y^2 - 8x - 10y + 25 = 0$. Chọn A

Câu 20. Tâm đường tròn (C) và (C') là $I(-2;0)$, (C) có bán kính $R = 6$.

Vậy phương trình của (C) là : $(x+2)^2 + y^2 = 36$. Chọn B

Câu 21. Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R = 3$ có phương trình :

$x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$ (vì $c = a^2 + b^2 - R^2 = 4 + 1 - 9 = -4$).

Chọn C

Câu 22. (C) tiếp xúc với $x'Ox \Leftrightarrow R = |b| \Leftrightarrow R^2 = b^2 = 16 \Rightarrow I$ đúng.

(C) tiếp xúc với $y'Oy \Leftrightarrow R = |a| \Leftrightarrow R^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow c = a^2 + b^2 - R^2 = b^2.$$

Vậy $(C): x^2 + y^2 + 6x - 8y + 16 = 0 \Rightarrow II$ sai.

(C) qua gốc tọa độ nên phương trình có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0$.

Do đó $(C): x^2 + y^2 - 4x - 10y = 0 \Rightarrow III$ đúng. Chọn B

Câu 23. $(C): x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ (C) tiếp xúc với $x'Ox$ tại $A(3;0)$

$\Rightarrow a = 3$ và $|b| = R \Rightarrow C = a^2 + b^2 - R^2 = a^2 = 9$.

Vậy $(C) x^2 + y^2 - 6x - 2by + 9 = 0$.

$B(2;2) \in (C) \Rightarrow 4 + 4 - 12 - 4b + 9 = 0 \Rightarrow b = \frac{5}{4}$.

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 6x - \frac{5}{2}y + 9 = 0$. Chọn C

Câu 24. Phương trình của (C) có dạng: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $x + 2y - 2 = 0$ nên $a + 2b - 2 = 0$. (1)

(C) qua A và B nên ta có :

$$25+16-10a-8b+c=0 \Leftrightarrow 10a+8b-c=41, \qquad (2)$$
$$4+9+4a-6b+c=0 \Leftrightarrow 4a-6b+c=-13. \qquad (3)$$

Giải hệ ba phương trình này ta được : $a=2,\ b=0,\ c=-21$.

Vậy $x^2+y^2-4x-21=0$. Chọn A

Câu 25. Ta có : $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0 \Leftrightarrow \widehat{MPN}=90^0 \Rightarrow (C)\begin{cases}\text{tâm } I(0;1)\\ \text{bán kính } R=IP=5.\end{cases}$

Vậy $(C): x^2+y^2-4x-24=0$. Chọn A

Câu 26. $\overrightarrow{AB}=(8;0),\ \overrightarrow{AC}=(0;6) \Rightarrow AB\perp AC \Rightarrow \Delta ABC$ vuông ở A.

(C) có tâm $I(4;7)$ là trung điểm của BC và bán kính $R=IA=5$..

Chọn C

Ghi chú : * Có thể giải như câu 25.

* Có thể vẽ hình và đoán nhận kết quả.

Câu 27. $I(m;5),\ d(I;d)=d(I;D)=R \Leftrightarrow \dfrac{|m-18|}{\sqrt{10}}=\dfrac{|3m-14|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\\ m=8.\end{array}\right.$

* Với $m=-2 \Rightarrow R=2\sqrt{10}$.

* Với $m=8 \Rightarrow R=\sqrt{10}$.

Vậy (C) có phương trình $\left[\begin{array}{l}(x+2)^2+(y-5)^2=40\\ (x-8)^2+(y-5)^2=10.\end{array}\right.$ Chọn D

Ghi chú : Có thể giải nhanh như sau :

$I(m;5) \Rightarrow \dfrac{|m-18|}{\sqrt{18}}=\dfrac{|3m-14|}{\sqrt{10}}$ dẫn đến 2 giá trị của m.

Nên A, B bị loại, C cũng bị loại vì $I(m;5)$ chứ không phải $I(m;-5)$.

Chọn D

Câu 28. Tâm $I(a;b)$ nằm trên đường thẳng d qua $A(-7;1)$ và vuông góc với D nên có phương trình $3(x+7)+4(y-1)=0$, $a=-3$ nên $y=b=-2$. Do đó : $I(-3;-2)$. Suy ra :

$$R=AI=\sqrt{(-3+7)^2+(-2-1)^2}=5.$$

Vậy $(C): (x+3)^2+(y+2)^2=25$. Chọn B

Ghi chú : Có thể giải nhanh như sau :

Vì $I(-3;b)$ nên A, C bị loại $\Rightarrow$ còn xét B, D.

Tọa độ của $A(-7;1)$ thỏa B (tức không thỏa D). Chọn B

Câu 29. $IA = IB \Rightarrow I \in y'Oy \Rightarrow I(0;b)$. (C) tiếp xúc với $D \Rightarrow d(I;D) = R$.

Suy ra $\dfrac{|3.0 + 4b + 9|}{\sqrt{9+16}} = \sqrt{(0-3)^2 + (b-0)^2}$.

Vậy $|4b+9| = 5\sqrt{9+b^2} \Leftrightarrow 9b^2 - 72b + 144 = 0$

$\Leftrightarrow b^2 - 8b + 16 = 0 \Leftrightarrow b = 4$.

Vậy $R = 5$ và $I(0;4)$. Chọn B

Ghi chú : Cách giải nhanh : Tọa độ điểm $A(3;0)$ chỉ thỏa phương trình $B/$ và $C/$. Chỉ điểm $I(0;4)$ thỏa điều kiện $d(I;D) = OA$ còn điểm $I(0;-4)$ không thỏa. Chọn B

Câu 30. (C) tiếp xúc với hai trục tọa độ và điểm $A(2;1)$ nằm trong góc phần tư thứ I nên tâm I có tọa độ $(a;a)$ với $a > 0$.

$d(I;x'Ox) = R \Rightarrow a = IA = \sqrt{(a-2)^2 + (a-1)^2} \Rightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$.

Vậy $\left[\begin{array}{l} a = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1 \\ a = 5 \Rightarrow (x-5)^2 + (y-5)^2 = 25. \end{array}\right.$ Chọn A

Câu 31. Tiếp tuyến phải tìm là đường thẳng đi qua $M(3;5)$ và có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (2;4)$ nên có phương trình $2(x-3) + 4(y-5) = 0$ hay $x + 2y - 13 = 0$. Chọn C

Câu 32. Tiếp tuyến D tại $M(5;2)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (3;4)$ nên có phương trình : $3(x-5) + 4(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 23 = 0$. Chọn D

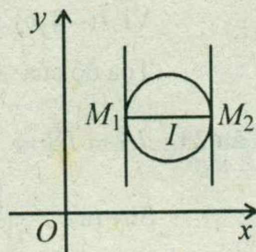
Câu 33. Tâm đường tròn (C) là $I(-1;3)$, $\overrightarrow{IM} = (6;-8)$. Phương trình tiếp tuyến : $6(x-5) - 8(y+5) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y - 35 = 0$. Chọn D

Ghi chú : cách giải khác : Câu B, C không phù hợp với vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IM} = (6;-8)$, loại. Câu A không thỏa khi thay $x = 5$, $y = -5$.

Chọn D

Câu 34. Ta có : $y = 5 \Rightarrow (x-3)^2 = 1$, suy ra :

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \Rightarrow M_1(4;5) \\ x = 2 \Rightarrow M_2(2;5). \end{array}\right.$$



Vì các điểm $I(3;5)$, M_1, M_2 có cùng tung độ nên các bán kính IM_2, IM_1 song song với trục $x'Ox$. Suy ra các tiếp tuyến tại M_2, M_1 có phương trình $x = 2$, $x = 4$.

Chọn B

Ghi chú : Vẽ hình sẽ nhận ra ngay kết quả.

Câu 35. Tiếp tuyến $D : 3x + 4y + c = 0$. Suy ra :

$$d(I;D) = R \Leftrightarrow \frac{|3.0 + 4.2 + c|}{\sqrt{9+16}} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c + 8 = -25 \\ c + 8 = +25 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = -33 \\ c = 17. \end{array}\right.$$

Chọn A

Câu 36. D có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (3;4)$ nên có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (4;-3)$. Vậy D có phương trình : $4x - 3y + c = 0$. Đường tròn có tâm $I(0;2)$ và bán kính $R = 5$. Ta có :

$$d(I,D) = R \Leftrightarrow \frac{|4.0 - 3.2 + c|}{\sqrt{16+9}} = 5 \Leftrightarrow |c - 6| = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 31 \\ c = -19. \end{array}\right.$$

Vậy (D): $\left[\begin{array}{l} 4x - 3y + 31 = 0 \\ 4x - 3y - 19 = 0. \end{array}\right.$

Chọn C

Câu 37. (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R = 5$; $(D) : kx - y + 8 = 0$. D là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(I;D) = R \Leftrightarrow \dfrac{|k+7|}{\sqrt{k^2+1}} = 5$

$$\Leftrightarrow 12k^2 - 7k - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = -\dfrac{3}{4} \\ k = \dfrac{4}{3}. \end{array}\right.$$

Chọn B

Câu 38. Đường thẳng $D : x - m = 0$ là tiếp tuyến của đường tròn $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0 \Leftrightarrow d(I,D) = R$ với $I(1;-2)$, $R = 4$

$$\Leftrightarrow |1 - m| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 - m = 4 \\ 1 - m = -4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -3 \\ m = 5. \end{array}\right.$$

Chọn D

Câu 39. (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R = 4$;

$$d(I,D) = R \Leftrightarrow |-2-n| = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n+2=4 \\ n+2=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=-6. \end{array}\right.$$ Chọn A

Câu 40. $R^2 = a^2 + b^2 - c = 4 + 9 - m + 3 = 16 - m$ (điều kiện $m < 16$);
$I(2;-3)$, suy ra : (C) tiếp xúc với D khi và chỉ khi :

$$d(I,D) = R \Leftrightarrow \frac{|8+9-7|}{\sqrt{16+9}} = \sqrt{16-m} \Leftrightarrow m = 12.$$ Chọn D

Câu 41. (C) có tâm $I(3;0)$, bán kính $R = 5$, đường thẳng D có phương trình :

$$y = k(x-2) + 7 \Leftrightarrow kx - y - 2k + 7 = 0.$$

D tiếp xúc với (C) khi và chỉ khi :

$$d(I,D) = R \Leftrightarrow \frac{|k+7|}{\sqrt{k^2+1}} = 5 \Leftrightarrow 12k^2 - 7k - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = \frac{4}{3} \Rightarrow 4x - 3y + 13 = 0 \\ k = -\frac{3}{4} \Rightarrow 3x + 4y - 34 = 0. \end{array}\right.$$ Chọn B

Câu 42. $R_1 + R_2 < I_1I_2$: hai đường tròn ngoài nhau, có 4 tiếp tuyến chung.
$|R_1 - R_2| < I_1I_2 < R_1 + R_2$: hai đường tròn cắt nhau, có hai tiếp tuyến chung. Chọn D

Câu 43. Chọn D.

Câu 44. (C_1) có tâm $O(0;0)$ và $R_1 = 4$; (C_2) có tâm $I(3;-4)$ và $R_2 = 1$.
Khoảng cách hai tâm $OI = \sqrt{(3-0)^2 + (-4-0)^2} = 5 = R_1 + R_2$. Hai đường tròn tiếp xúc ngoài $\Rightarrow$ số tiếp tuyến chung là ba. Chọn C

Câu 45. (C_1) có tâm $I_1(4;3)$ và $R_1 = 5$; (C_2) có tâm $I_2(-3,3)$ và $R_2 = 6$;
$I_1I_2 = 7$. Vì $R_2 - R_1 = 1 < I_1I_2 < R_1 + R_2 = 11 \Rightarrow (C_1)$ cắt (C_2).
Chọn A

Câu 46. (C_1) có $I_1(4;3)$, $R_1 = 5$; (C_2) có $I_2(0;-1)$, $R_2 = 5$, $\overrightarrow{I_2I_1} = (4;4)$. Vì $R_1 = R_2 = 5$ nên hai tiếp tuyến chung song song với I_2I_1 và khoảng cách từ I_2 đến tiếp tuyến đó bằng 5, tiếp tuyến này có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;-1)$ nên có phương trình : $x - y + c = 0$ (D). Ta có :

$$d(I_2, D) = 5 \Leftrightarrow \frac{|0+1+c|}{\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow c = -1 \pm 5\sqrt{2}.$$ Chọn B

Câu 47. (C_1) có $I_1(3;2)$, $R_1 = 2$; (C_2) có $I_2(-1;2)$, $R_2 = 2$. Vì $R_1 = R_2 = 2$ và $I_1I_2 = 4 = R_1 + R_2$ nên (C_1), (C_2) tiếp xúc ngoài tại điểm $A(1;2)$ (là trung điểm của I_1I_2). Hai tiếp tuyến chung song song là $y = 0$ và $y = 4$. Tiếp tuyến chung tại A là : $x = 1$. Chọn B

Ghi chú : Vẽ sơ lược hình sẽ nhận ra ngay kết quả.

Câu 48. (C_1) có $I_1(2;2)$, $R_1 = 2\sqrt{2}$; (C_2) có $I_2(3;3)$, $R_2 = 3\sqrt{2}$.

(C_1), (C_2) có điểm O chung và O, I_1, I_2 thẳng hàng.

(C_1), (C_2) tiếp xúc trong tại A, tiếp tuyến tại A: $x + y = 0$. Chọn A

Câu 49. $(C_1): x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$ có $I_1(-2;-3)$ và $R_1 = \sqrt{4+9-12} = 1$. $(C_2): x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$ có $I_2(2;-1)$ và $R_2 = 1$. Ta có :

$$R_1 + R_2 = 1 + 1 = 2 \text{ và } I_1I_2 = 2\sqrt{5} \Rightarrow R_1 + R_2 < I_1I_2.$$

Vậy (C_1), (C_2) ngoài nhau. Có bốn tiếp tuyến chung. Chọn C

Câu 50. (C_1) có $I_1(1;-1)$, $R_1 = \sqrt{6}$ và (C_2) có $I_2(1;-1)$, $R_2 = \sqrt{5}$.

(C_1), (C_2) là hai đường tròn đồng tâm, (C_2) chứa trong (C_1) nên không có tiếp tuyến chung nào. Chọn C

Câu 51. $\widehat{AMB} = 90^0 \Leftrightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính AB, có tâm $I(3;5)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(3-2)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10}$ nên có phương trình : $(x-3)^2 + (y-5)^2 = 10$. Chọn D

Câu 52. Cho $M(x;y)$, ta có :

$$MA^2 + MB^2 = 24 \Leftrightarrow (1-x)^2 + (1-y)^2 + (5-x)^2 + (5-y)^2 = 24$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 6x - 6y + 14 = 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-3)^2 = 4.$$ Chọn B

Câu 53. $MA = 2MB \Leftrightarrow AM^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (x+8)^2 + y^2 = 4\left[(x+2)^2 + y^2\right]$

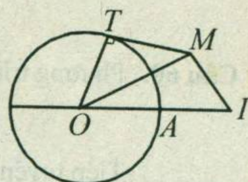
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16.$$ Chọn A

Câu 54. $MT^2 + MI^2 = 12 \Leftrightarrow OM^2 - R^2 + MI^2 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4 + (x-4)^2 + y^2 = 12$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0 \ (C')$.

Vì M nằm ngoài (C) nên tập hợp những điểm M là một cung của (C') nằm ngoài (C).



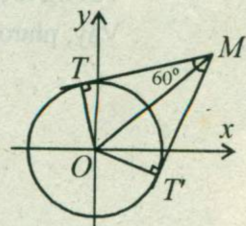
Chọn D

Câu 55. $\widehat{TMT'} = 60^0 \Rightarrow \widehat{OMT} = 30^0 \Rightarrow$ Tam giác vuông MOT là nửa tam giác đều.

Vậy $MD = 2OT = 4$.

Tập hợp phải tìm là đường tròn :

$$x^2 + y^2 = 16.$$

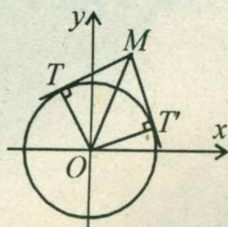


Chọn C

Câu 56. Ta có : $(C)\ x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow$ bán kính $OT = \sqrt{2}$;

$\widehat{TMT'} = 90^0 \Rightarrow OTMT'$ hình vuông cạnh $OT = \sqrt{2}$; $OM = OT\sqrt{2} = 2$.

Vậy, tập hợp những điểm M là đường tròn : $x^2 + y^2 = 4$.



Chọn A

Câu 57. (C_m) là đường tròn có tâm :

$$I\begin{cases} x_0 = \cos\alpha + 3 \\ y_0 = \sin\alpha \end{cases} \forall\alpha \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (x_0 - 3)^2 + y_0^2 = 1.$$

Vậy, tập hợp phải tìm là cả đường tròn $(x-3)^2 + y^2 = 1$. Chọn C

Câu 58. $(C_m) : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 + m(4-x) = 0$. Phương trình này đúng

$$\forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 + 2x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \vee y = -2. \end{cases}$$ Chọn A

Câu 59. Đường tròn qua giao điểm của đường tròn :

$(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ và đường thẳng $D : x + y - 4 = 0$ có phương trình : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 + m(x + y - 4) = 0 \ (C')$.

Vì $C(1;7) \in (C')$ nên :

$$1^2 + 7^2 - 2 - 42 + 6 + m(1 + 7 - 4) = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

Vậy $(C') : x^2 + y^2 - 5x - 9y + 18 = 0$. Chọn B

Câu 60. Phương trình tiếp tuyến tại A :

$$x_A x + y_A y - x_A - x + 2y_A + 2y - 11 = 0.$$

Tiếp tuyến này qua $M_0(4;2)$ nên :

$4x_A + 2y_A - x_A - 4 + 4 + 2y_A - 11 = 0$ hay $3x_A + 4y_A - 11 = 0$.

Tương tượng : $3x_B + 4y_B - 11 = 0$.

Vậy, phương trình đường thẳng AB là : $3x + 4y - 11 = 0$. Chọn D

Chuyên đề 7.

BA ĐƯỜNG CÔNIC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. ĐƯỜNG ELIP

1. Định nghĩa

- Đường elip (hay elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ thỏa $a > c$, trong đó F_1, F_2 là hai điểm cố định với $F_1F_2 = 2c$.
- F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, $2c$ gọi là tiêu cự của elip.

2. Phương trình chính tắc

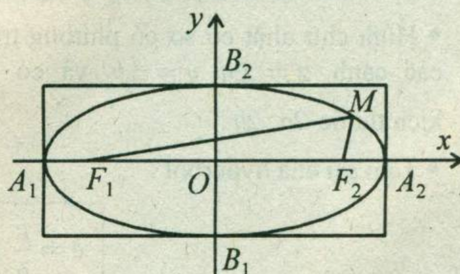
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \ (a > b > 0) \quad (1)$$

- ***Chú ý :*** $a^2 = b^2 + c^2$ và $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$,

$$MF_1 = a + \frac{c}{a}x_M \ ; \ MF_2 = a - \frac{c}{a}x_M \text{ với mọi } M \text{ thuộc elip.}$$

3. Hình dạng

- Elip có Ox, Oy là các trục đối xứng và O là tâm đối xứng.
- Trục lớn $A_1A_2 = 2a$ nằm trên Ox; trục nhỏ $B_1B_2 = 2b$ nằm trên Oy.
- Bốn đỉnh $A_1(-a;0)$; $A_2(a;0)$ $B_1(0;-b)$; $B_2(0;b)$.



- Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm a$; $y = \pm b$.
- *Tâm sai của elip*

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip được gọi là tâm sai của elip, kí hiệu là e. Vậy :

$$e = \frac{c}{a}\ (e < 1) \tag{2}$$

Các bán kính qua tiêu của điểm $M(x_M; y_M) \in$ elip :

$$MF_1 = a + ex_M\ ;\ MF_2 = a - ex_M \tag{3}$$

II. ĐƯỜNG HYPEBOL

1. Định nghĩa

- Hyperbol (H) là tập hợp các điểm M sao cho :

$$\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a \text{ với } a < c \text{ và } F_1F_2 = 2c.$$

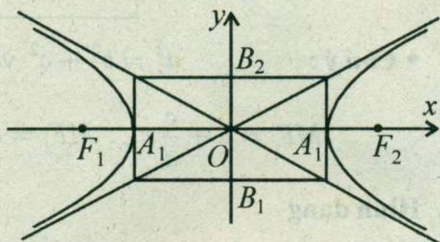
F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm, $2c$ gọi là tiêu cự của (H).

2. Phương trình chính tắc

$$(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{4}$$

- ***Chú ý :*** $c^2 = a^2 + b^2$.

3. Hình dạng



- Hyperbol có O là tâm đối xứng và Ox, Oy là trục đối xứng
- Trục thực $A_1A_2 = 2a$ nằm trên Ox, trục ảo $B_1B_2 = 2b$ nằm trên Oy.
- Hai đỉnh $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$.
- Hình chữ nhật cơ sở có phương trình các cạnh $x = \pm a$; $y = \pm b$ và có hai kích thước $2a$, $2b$.
- Tâm sai của hyperbol :

$$e = \frac{c}{a}\ (e < 1) \tag{5}$$

- Phương trình hai đường tiệm cận :

$$y = \pm\frac{b}{a}x \tag{6}$$

• Các bán kính qua tiêu điểm của $M(x_M;y_M) \in (H)$:

$$MF_1 = |a + ex_M| \; ; \; MF_2 = |a - ex_M| \qquad (7)$$

• ***Chú ý :*** $x_M > 0 \Rightarrow x_M \ge a; x_M < 0 \Rightarrow x_M \le -a$

III. ĐƯỜNG PARABOL

1. Định nghĩa

• Điểm F cố định, đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Parabol (P) là tập hợp các điểm cách đều F và Δ.

• F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn của (P).

2. Phương trình chính tắc

$$y^2 = 2px \; (p > 0) \qquad (8)$$

• Tọa độ $F\left(\frac{P}{2};0\right)$, phương trình $\Delta : x = -\frac{p}{2}$.

• Parabol (P) có trục đối xứng Ox và có đỉnh là O.

IV. BA ĐƯỜNG CONIC

1. Định nghĩa

• Cho điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F; e là một số dương.

Cônic (C) là tập hợp các điểm M sao cho : $\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e$.

• F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn, e gọi là tâm sai của cônic (C).

2. Cho cônic (C) với tâm sai e

• (C) là elip $\Leftrightarrow e < 1$.

• (C) là parabol $\Leftrightarrow e = 1$.

• (C) là hyperbol $\Leftrightarrow e > 1$.

3. Đường chuẩn của elip

• Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \; (a > b > 0)$.

• Đường chuẩn Δ_1 ứng với tiêu điểm $F_1(-c;0)$ có phương trình :

$$x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}.$$

• Đường chuẩn Δ_2 ứng với tiêu điểm $F_2(+c;0)$ có phương trình :

$$x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}.$$

• Với mọi điểm $M \in (E)$ thì :

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e < 1.$$

4. Đường chuẩn của hyperbol

Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

• Đường chuẩn Δ_1 ứng với $F_1(-c;0)$ là : $x = -\frac{a}{e} = -\frac{a^2}{c}$.

• Đường chuẩn Δ_2 ứng với $F_2(c;0)$ là : $x = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$.

• Với mọi điểm $M \in (H)$ thì :

$$\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e > 1.$$

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA CÔNIC

Phương pháp

• Từ phương trình chính tắc của elip, hyperbol và parabol suy ra a, b, c rồi áp dụng các công thức (2), (3), (5), (6) và (7) có liên quan.

• *Chú ý* : + với elip : $a > c$ và $b^2 = a^2 - c^2$ $(a > b)$.

+ với hyperbol : $a < c$ và $b^2 = c^2 - a^2$.

Ví dụ 1. Xác định tiêu điểm, đỉnh, độ dài các trục và tâm sai của :

a) Elip $(E): 16x^2 + 25y^2 = 400$.

b) Hyperbol $(H): 4x^2 - y^2 = 4$.

c) Parabol $(P): y^2 - \frac{3}{4}x = 0$.

Giải

a) $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1 \Rightarrow a = 5, b = 4$ và $c = 3$. Do đó :

+ Tiêu điểm : $F_1(-3;0)$, $F_2(3;0)$;

+ Đỉnh : $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$, $B_1(0;-4)$, $B_2(0;4)$;

+ Trục lớn : $A_1A_2 = 2a = 10$, trục nhỏ $B_1B_2 = 8$;

+ Tiêu cự : $2c = 6$;

+ Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

b) $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 1,\ b = 2,\ c = \sqrt{5}$. Do đó, hyperbol (H) có :

+ Tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{5};0)$, $F_2(\sqrt{5};0)$;

+ Đỉnh : $A_1(-1;0)$, $A_2(1;0)$;

+ Trục thực : $A_1A_2 = 2a = 2$, trục ảo $2b = 4$.

+ Tiêu cự : $2c = 2\sqrt{5}$;

+ Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$.

c) $(P): y^2 = \frac{3}{4}x \Rightarrow p = \frac{3}{8}$. Do đó, (P) có :

+ Tiêu điểm : $F\left(\frac{p}{2};0\right) = F\left(\frac{3}{16};0\right)$;

+ Đường chuẩn : $x = -\frac{3}{16}$.

Ví dụ 2. Xác định tâm sai, và phương trình đường chuẩn của các cônic sau:

a) $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

b) $(H): \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$.

c) $(P): y^2 = 6x$.

Giải

a) $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a = 2\sqrt{2},\ b = 2,\ c = 2$. Do đó, (E) có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ và phương trình các đường chuẩn $x = \frac{a}{e} = \sqrt{2}$ và $x = -\frac{a}{e} = -\sqrt{2}$.

b) $(H): \frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{15} = 1$ có $a = 2\sqrt{5},\ b = \sqrt{15} \Rightarrow c = \sqrt{35}$. Do đó (H) có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{2}$ và phương trình hai đường chuẩn $x = \pm\frac{4\sqrt{35}}{7}$.

c) $(P): y^2 = 6x \Rightarrow p = 3 \Rightarrow (P)$ có tâm sai $e = 1$ và đường chuẩn $x = -\dfrac{3}{2}$.

Dạng 2. VIẾT PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA CÔNIC

Phương pháp

- Tìm a, b để thay vào phương trình chính tắc của elip hoặc hypebol. Chú ý rằng hypebol không có điều kiện $a > b$.
- Tìm p để thay vào phương trình chính tắc của parabol.
- Chú ý : Nếu bài toán không yêu cầu phương trình chính tắc thì có thể dùng định nghĩa của ba đường cônic.

Ví dụ 1. Lập phương trình chính tắc của :

a) Elip (E) có tiêu cự bằng 4 và tỉ số giữa hai trục là $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

b) Hyperbol (H) qua điểm $A(3;0)$ và có phương trình các đường tiệm cận là $4x \pm 3y = 0$.

c) Parabol (P) có đường chuẩn $x = -\dfrac{1}{2}$.

Giải

a) Phương trình (E) có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ với $a^2 = b^2 + c^2$.

Giả thiết $\Rightarrow \begin{cases} 2c = 4 \Leftrightarrow c = 2 \\ \dfrac{2b}{2a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ 5a^2 = 9b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 9 \\ b^2 = 5. \end{cases}$

Vậy, phương trình chính tắc của (E): $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$.

b) Phương trình (H) có dạng : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

- (H) qua $A(3;0) \Leftrightarrow \dfrac{9}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 9$.
- Tiệm cận $bx \pm ay = 0 \Leftrightarrow 4x \pm 3y = 0 \Rightarrow b^2 = 16$ (vì $a = 3$).

Vậy, phương trình chính tắc của (H) : $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

c) Parabol (P) có phương trình $y^2 = 2px$ với đường chuẩn $x = -\frac{p}{2}$, từ giả thiết $\frac{p}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow p = 1$.

Vậy, phương trình chính tắc của $(P): y^2 = 2x$.

Ví dụ 2. Tìm phương trình của các cônic sau :

a) Elip (E) có tiêu điểm $F(-1;4)$, đường chuẩn $\Delta : y = 0$ và tâm sai $e = \frac{1}{2}$.

b) Hyperbol (H) tiêu điểm $F(-3;-2)$, đường chuẩn $\Delta : x - 2y + 1 = 0$ và tâm sai $e = \sqrt{3}$.

c) Parabol (P) có tiêu điểm $F(3;1)$, đường chuẩn $\Delta : x = 0$.

Giải

a) Gọi $M(x;y) \in$ elip (E), ta có :

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \frac{(x+1)^2 + (4-y)^2}{y^2} = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}y^2 + 2x - 8y + 17 = 0. \quad (1)$$

(1) là phương trình elip phải tìm.

b) Tương tự, $M(x;y) \in$ hyperbol (H) khi và chỉ khi :

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e \Leftrightarrow \frac{(x+3)^2 + (y+2)^2}{|x - 2y + 1|^2} = \frac{3}{5}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 7y^2 + 12xy + 24x + 32y + 62 = 0.$$

c) $M(x,y) \in$ parabol (P) khi và chỉ khi :

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x-3)^2 + (y-1)^2}{x^2} = 1$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 6x - 2y + 10 = 0.$$

Dạng 3. TÌM ĐIỂM TRÊN CÔNIC THOẢ MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Phương pháp

Với $M(x;y)$, giải hệ phương trình : $\begin{cases} (x;y) \text{ thỏa phương trình cônic} \\ (x;y) \text{ thỏa điều kiện cho trước.} \end{cases}$

Ví dụ 1. Tìm điểm M biết :

a) $M \in$ hyperbol $(H): 9x^2 - 16y^2 = 144$ và $MF_1 \perp MF_2$.

b) $M \in$ parabol $(P): y^2 = 16x$ và $OM^2 + FM^2 = 72$.

Giải

a) $MF_1 \perp MF_2 \Leftrightarrow$ tam giác F_1MF_2 vuông tại M nên $OM = \frac{1}{2}F_1F_2$. Gọi $M(x;y) \in (H)$.

Từ giả thiết $\Rightarrow \begin{cases} 9x^2 - 16y^2 = 144 \\ x^2 + y^2 = c^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{544}{25} \\ y^2 = \dfrac{84}{25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{4}{5}\sqrt{34} \\ y = \pm\dfrac{9}{5} \end{cases}$

Vậy có bốn điểm M theo yêu cầu là :

$M_1\left(\frac{4}{5}\sqrt{34};\frac{9}{5}\right); M_2\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34};\frac{9}{5}\right); M_3\left(\frac{4}{5}\sqrt{34};-\frac{9}{5}\right); M_4\left(-\frac{4}{5}\sqrt{34};-\frac{9}{5}\right)$.

b) $M(x;y) \in (P)$ và thỏa $OM^2 + FM^2 = 72$ với $F(4;0)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16x \\ x^2 + y^2 + (x-4)^2 + y^2 = 72 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x^2 + 12x - 28 = 0 \end{cases}$

Tìm được hai điểm $M \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 16 \\ x = 2 \text{ (loại } x = -14). \end{cases}$

Vậy có hai điểm M theo yêu cầu là : $M_1(z;4\sqrt{2})$; $M_2(z;-4\sqrt{2})$.

Ví dụ 2. Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 = 4$, có hai tiêu điểm F_1, F_2. Tìm điểm $M \in (E)$ sao cho $\widehat{E_1ME_2} = 120^0$.

Giải

(E) có hai tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3};0)$, $F_2(\sqrt{3};0)$ và $2c = 2\sqrt{3}$, $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Với $MF_1 = a + ex$; $MF_2 = a - ex$. Từ tam giác F_1MF_2 ta có :

$$F_1F_2^2 = MF_1^2 + MF_2^2 - 2MF_1.MF_2 \cos M$$

$$\Leftrightarrow 12 = (a+ex)^2 + (a-ex)^2 - 2(a^2 - e^2x^2)\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ngoài ra $M(x;y) \in (E) \Leftrightarrow x^2 + 4y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y \pm 1$.

Vậy, tìm được hai điểm $M_1(0;1)$; $M_1(0;-1)$.

Dạng 4. CHỨNG MINH MỘT TÍNH CHẤT CỦA CÔNIC

Phương pháp

- Sử dụng các công thức của cônic có liên quan đến tính chất phải chứng minh.
- Chú ý điểm nằm trên cônic có tọa độ thỏa phương trình cônic

Ví dụ 1. Chứng minh rằng :

a) Với mọi điểm $M \in elip(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, ta có giá trị biểu thức $OM^2 + F_1M.F_2M$ không phụ thuộc M.

b) Với mọi điểm $M \in$ hyperbol $\left(H\right): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9^2} = 1$, ta có tích của khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của (H) bằng một hằng số.

Giải

a) Với mọi $M(x;y) \in (E)$, ta có :

$$CM^2 + F_1M.F_2M = x^2 + y^2 + (a+ex)(a-ex)$$
$$= x^2 + y^2 + a^2 - e^2x^2 = x^2(1-e^2) + y^2 + a^2$$
$$= x^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2} + y^2 + a^2\right) = \frac{x^2}{a^2}\left(a^2 - c^2\right) + y^2 + a^2$$
$$= \frac{b^2x^2}{a^2} + y^2 + a^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) + a^2 = a^2 + b^2 \text{ (vì } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\text{)}.$$

b) $(H): \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a = 4,\ b = 3$, suy ra hai đường tiệm cận :

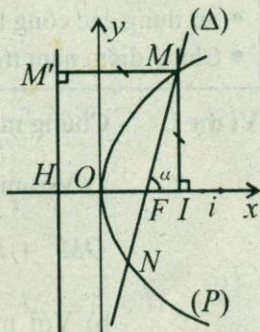
$$y = \pm\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx \pm ay = 0 \Leftrightarrow 3x \pm 4y = 0.$$

Với $M(x;y) \in (H)$. Tích các khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là :

$$d(M,\Delta_1).d(M,\Delta_2) = \frac{|3x+4y|}{\sqrt{25}} \cdot \frac{|3x-4y|}{\sqrt{25}}$$
$$= \frac{|9x^2 - 16y^2|}{25} = \frac{144}{25}\left|\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9}\right| = \frac{144}{25} \text{ (vì } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1\text{)}.$$

Ví dụ 2. Cho parabol $(P): y^2 = 2px \ (p > 0)$; đường thẳng Δ qua tiêu điểm E cắt (P) tại M và N. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN}$ không đổi khi Δ quay quanh F.

Giải



Đặt $\alpha = (Ox, FM) \ (0 < \alpha < \pi)$. Ta có :

$MF = MM' = IH$; $\overline{IH} = \overline{IF} + \overline{FH}$.

Suy ra : $IH = p + \overrightarrow{FM}.\vec{i}$. Do đó :

$$MF = p + MF\cos\alpha \Rightarrow MF = \frac{p}{1 - \cos\alpha}$$

Tương tự : $NF = \dfrac{p}{1 - \cos(180^0 - \alpha)} = \dfrac{p}{1 + \cos\alpha}$.

Do đó : $\dfrac{1}{FM} + \dfrac{1}{FN} = \dfrac{1 - \cos\alpha + 1 + \cos\alpha}{p} = \dfrac{2}{p}$ (không đổi).

Dạng 5. TẬP HỢP ĐIỂM LÀ CÔNIC

Phương pháp

- Với $M(x;y)$ di động thỏa điều kiện cho trước.

Tìm hệ thức giữa x và y theo điều kiện đã cho và biến đổi thành phương trình cônic.

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $(\Delta): 3x + 4 = 0$ và điểm $A(-3;0)$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho $2MA = 3d(M, \Delta)$.

Giải

Ta có : $MA^2 = (x+3)^2 + y^2$ với $M(x;y)$ và $d(M, \Delta) = \dfrac{|3x+4|}{3}$.

Từ $2MA = 3d(M, A) \Leftrightarrow 4MA^2 = 9d(M, A)^2$

$$\Leftrightarrow 4(x+3)^2 + 4y^2 = (3x+4)^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 4y^2 = 20 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Vậy, tập hợp M là hyperbol $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$.

Ví dụ 2. Cho hai điểm $A(-1;0)$, $B(1;0)$ và đường thẳng $\Delta : y = 3$. Lấy M bất kì trên Δ. Tìm tập hợp trực tâm H của tam giác ABM. Khi điểm M chạy trên Δ.

Giải

$M \in (\Delta) \Rightarrow M(x_0;3) \Rightarrow$ đường cao vẽ từ $M : x = x_0$.

Vì $\overrightarrow{AM} = (x_0 + 1;3)$ nên phương trình đường cao vẽ từ B là :

$$(x_0 + 1)(x - 1) + 3(y - 0) = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)x + 3y - (x_0 + 1) = 0.$$

Tọa độ trực tâm H là : $\begin{cases} x_H = x_0 \\ y_H = \dfrac{(x_0 + 1) - (x_0 + 1)x_H}{3} = -\dfrac{1}{3}(x_0^2 - 1) \end{cases}$

Khử x_0 ta được : $y_H = -\dfrac{1}{3}(x_H^2 - 1) \Leftrightarrow y_H = -\dfrac{1}{3}x_H^2 + \dfrac{1}{3}$.

Vậy, tập hợp trực tâm H của tam giác ABM là parabol : $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + \dfrac{1}{3}$.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

• Cho elip $(E) : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, gọi c là nửa tiêu cự. Dùng giả thiết này cho các câu 1, 2, 3, 4 .

Câu 1. Xét các mệnh đề sau :

I. Hai đường chuẩn của (E) có phương trình : $x = \pm\dfrac{a^2}{c}$;

II. Hai tiêu điểm của (E) là : $F_1(0;-c)$, $F_2(0;-c)$;

III. Các cạnh của hình chữ nhật cơ sở của (E) có phương trình lần lượt là : $x = \pm a$, $y = \pm b$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II.
B) Chỉ I và III.
C) Chỉ II và III.
D) Cả I, II và III.

Câu 2. Xét các mệnh đề sau :

I. Tiêu cự của (E) là : $2c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

II. Tâm sai của (E) là : $e = \dfrac{a}{c}$;

III. Gọi $M(x;y)$ là một điểm của (E) thì $MF_1^2 - MF_2^2 = 2ex$.

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ I và III. D) Cả I, II và III.

Câu 3. Xét các mệnh đề sau :

I. Đường tròn ngoại tiếp với (E) tại hai đỉnh trục lớn có phương trình : $x^2 + y^2 = a^2$;

II. Đường tròn nội tiếp với (E) tại hai đỉnh trục nhỏ có phương trình : $x^2 + y^2 = b^2$;

III. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (E) là $\frac{a^2}{c}$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ I và III.

C) Chỉ II và III. D) Cả I, II và III.

Câu 4. Xét các mệnh đề sau :

I. (E) có một tâm đối xứng ;

II. (E) có một trục đối xứng ;

III. (E) có hai trục đối xứng.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ I và II. C) Chỉ I và III. D) Chỉ III.

Câu 5. Lập phương trình chính tắc của elip (E) biết một đỉnh là $A(-4;0)$ và một tiêu điểm là $F(3;0)$.

A) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$. B) $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1$.

C) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. D) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Câu 6. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một đỉnh là $B(0;3)$ và một tiêu điểm là $F(-2;0)$.

A) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$. B) $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$.

C) $\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{3} = 1$. D) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$.

Câu 7. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có tiêu cự bằng 8 và tâm sai bằng $\frac{4}{5}$.

A) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$. B) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Câu 8. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x=\pm 5,\ y=\pm 4$.

A) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.　　B) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

Câu 9. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có một tiêu điểm $F(-2;0)$ và đi qua điểm $M(2;3)$.

A) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　B) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Câu 10. Lập phương trình chính tắc của elip (E) có trục lớn bằng 10, tiêu cự bằng 6.

A) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.　　B) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{3}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

Câu 11. Elip (E) nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2=9$ ngoại tiếp đường tròn $(C'): x^2+y^2=4$ thì phương trình chính tắc của (E) là :

A) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}=1$.　　B) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{13}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Câu 12. Elip (E) có một đỉnh là $A(5;0)$ là đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở là $(\alpha): x^2+y^2-41=0$ thì phương trình chính tắc của (E) là :

A) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.　　B) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{41}+\dfrac{y^2}{16}=1$.　　D) $\dfrac{x^2}{41}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

Câu 13. Elip (E) có tâm $O(0;0)$, hình chữ nhật cơ sở có một cạnh là $x+3=0$ và đường chéo bằng 32 thì phương trình chính tắc của (E) là :

A) $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{3}=1$.
B) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$.
C) $\dfrac{x^2}{49}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{7}=1$.

Câu 14. Elip (E) nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2-25=0$ và có tâm sai bằng $\dfrac{4}{5}$. Tìm phương trình chính tắc của (E).

A) $\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{y^2}{4}=1$.
B) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
C) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.
D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Câu 15. Tìm phương trình chính tắc của elip (E) có trục nhỏ bằng 6 và đi qua $M(-2\sqrt{5};2)$.

A) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{3}=1$.
B) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$.
C) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{6}=1$.

Câu 16. Tìm phương trình chính tắc của elip (E) đi qua hai điểm $M(4;-\sqrt{3})$ và $M(2\sqrt{2};3)$.

A) $\dfrac{x^2}{20}+\dfrac{y^2}{15}=1$.
B) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.
C) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.
D) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$.

Câu 17. Elip (E) có trục lớn bằng 10, tâm sai bằng $\dfrac{3}{5}$. Độ dài trục nhỏ bằng :

A) 4.
B) 8.
C) 6.
D) 10.

Câu 18. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $a>b>0$. Dây cung vuông góc với trục lớn tại tiêu điểm có độ dài bằng :

A) $\dfrac{2a^2}{b}$.
B) $\dfrac{2b}{a}$.
C) $\dfrac{2b^2}{c}$.
D) $\dfrac{2b^2}{a}$.

• Cho elip $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1$. M là một điểm trên (E) có khoảng cách đến tiêu điểm bên trái F_1 bằng 7. Dùng giả thiết này cho các câu 19, 20.

Câu 19. Tính khoảng cách từ M đến tiêu điểm bên phải F_2.

A) 24. B) 18. C) 5. D) 6.

Câu 20. Tìm tọa độ của M:

A) $(2;2\sqrt{6})$.

B) $(2;2\sqrt{6})$, $(2;-2\sqrt{6})$.

C) $(2;-2\sqrt{6})$.

D) $(2\sqrt{6};-2)$, $(-2\sqrt{6};2)$.

Câu 21. Tìm điểm M trên elip $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ có khoảng cách đến tiêu điểm bên trái F_1 bằng hai lần khoảng cách đến tiêu điểm bên phải.

A) $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

B) $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

C) $M_1\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

D) $M_1\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{\sqrt{6}}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$.

Câu 22. Gọi $M(x;y)$ là một điểm trên elip $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$. Tính giá trị của biểu thức $MF_1.MF_2 + OM^2$ với F_1 và F_2 là hai tiêu điểm của (E).

A) 64. B) 48. C) 164. D) 136.

• Cho elip $(E): x^2 + 5y^2 = 20$. Dùng giả thiết này cho các câu 23, 24.

Câu 23. Tìm phương trình đường tròn ngoại tiếp và đường tròn nội tiếp elip (E).

A) $x^2 + y^2 = 5$; $x^2 + y^2 = 1$.

B) $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 1$.

C) $x^2 + y^2 = 20$; $x^2 + y^2 = 4$.

D) $x^2 + y^2 = 5$; $x^2 + y^2 = 4$.

Câu 24. Tìm điểm M trên (E) nhìn hai tiêu điểm F_1 và F_2 dưới góc vuông.

A) $M_1(\sqrt{15};1)$, $M_2(-\sqrt{15};1)$, $M_3(\sqrt{15};-1)$, $M_4(-\sqrt{15};-1)$.

B) $M_1(\sqrt{15};1)$, $M_2(-\sqrt{15};-1)$.

C) $M_1(1;\sqrt{15})$, $M_2(-1;-\sqrt{15})$.

D) $M_1(1;\sqrt{15})$, $M_2(1;-\sqrt{15})$, $M_3(-1;\sqrt{15})$, $M_4(-1;-\sqrt{15})$.

- Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 = R^2$. Dùng giả thiết này cho các câu 25, 26.

Câu 25. (E) và (C) có hai điểm chung khi và chỉ khi :

A) $b < R$ hoặc $a < R$. B) $b = R$ hoặc $a = R$.

C) $b < R < a$. D) $b > R$ hoặc $a < R$.

Câu 26. (E) và (C) và có bốn điểm chung khi và chỉ khi :

A) $b > R$ hoặc $a < R$. B) $b = R$ hoặc $a = R$.

C) $b < R < a$. D) $b < R$ hoặc $a > R$.

Câu 27. Tìm tập hợp các tâm M của đường tròn (α) di động có bán kính r thay đổi đi qua điểm $I(-3;0)$ và tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x - 55 = 0$.

A) Đường tròn (C_1) tâm O, bán kính $R_1 = 4$.

B) Đường parabol $(P): y = 6x$.

C) Đường tròn (C_2) tâm O, bán kính $R_2 = 2\sqrt{2}$.

D) Đường elip (E) tâm O, hai tiêu điểm $I(-3;0)$, $J(3;0)$, trục lớn có độ dài bằng 8.

Câu 28. Tìm tập hợp các tâm M của các đường tròn :

$(C_t): x^2 + y^2 - 10\cos 2t.x - 8\sin 2t.y - \cos 2t - 1 = 0$, $t \in R$.

A) Elip $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

B) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$.

C) Elip $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

D) Elip $(E): \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{8} = 1$.

Câu 29. Tìm tập hợp các điểm $M\left(\frac{4-4t^2}{1+t^2}; \frac{6t}{1+t^2}\right)$, $t \in R$.

A) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 25$. B) Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

C) Elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.   D) Elip $(E): \dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

Câu 30. Cho điểm $M(x;y)$ chạy trên đường tròn $(C): x^2+y^2=36$. Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của M trong phép co về trục Ox với hệ số $k=\dfrac{1}{2}$. Tìm tập hợp các điểm M'.

A) Elip $(E): \dfrac{x'^2}{6}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.   B) Elip $(E): \dfrac{x'^2}{36}+\dfrac{y'^2}{9}=1$.

C) Đường tròn: $x'^2+y'^2=9$.   D) Elip $(E): \dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

Câu 31. Cho điểm $M(x;y)$ chạy trên elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Tìm tập hợp các điểm $M'(x';y')$ ảnh của M trong phép co về trục Ox với hệ số $k=\sqrt{3}$.

A) Elip $(E')=\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{12}=1$.

B) Đường tròn $(C): x'^2+y'^2=16$.

C) Đường tròn $(C'): x'^2+y'^2=4$.

D) Elip $(E'): \dfrac{x'^2}{4}+\dfrac{y'^2}{3}=1$.

Câu 32. Tìm ảnh của elip $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ qua phép co về trục Ox theo hệ số $k=\dfrac{4}{3}$.

A) Elip $(E'): \dfrac{x'^2}{48}+\dfrac{y'^2}{27}=1$.

B) Elip $(E'): \dfrac{x'^2}{64}+\dfrac{y'^2}{27}=1$.

C) Đường tròn $(\alpha): x'^2+y'^2=9$.

D) Đường tròn $(C): x'^2+y'^2=16$.

Câu 33. Gọi (E) là ảnh của $(C): x^2+y^2=R^2$ qua phép co về trục Ox theo hệ số $m^2, m\neq 0$. Định m để (E) là elip có trục lớn ở trên trục $Ox\,(R>0)$.

A) $m < -1 \vee m > 1$. B) $0 < m < 1$.
C) $-1 < m \neq 0 < 1$. D) $-1 < m < 0$.

Câu 34. Cho elip $(E): x^2 + 2y^2 - 4 = 0$. Xác định tâm sai và đường chuẩn của (E).

A) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm 4\sqrt{2}$. B) $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x = \pm 2\sqrt{2}$.

C) $e = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x = \pm 2\sqrt{2}$. D) $e = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $x = \pm 4\sqrt{2}$.

Câu 35. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tỷ số các khoảng cách đến điểm $F(2;0)$ và đường thẳng $(D): x - 8 = 0$ bằng $\frac{1}{2}$.

A) Elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. B) Elip $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$.

C) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$. D) Parabol $(P): y = x^2 - 2x + 3$.

Câu 36. Cho đoạn $AB = 12$ di động sao cho A chạy trên Ox và B chạy trên Oy. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ chia đoạn AB theo tỷ số $-\frac{1}{2}$.

A) Elip $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

B) Đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 144$.

C) Elip $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.

D) Parabol $(P): y = \frac{x^2}{4} + 16$.

Câu 37. Nếu phép co về trục Ox theo hệ số k biến elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ thành đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 16$ thì k bằng :

A) $\frac{1}{2}$. B) $\pm\frac{1}{2}$. C) 4. D) ± 2.

• Cho đường cong $(C_m): y^2 = m - \frac{x^2}{m}$, $m > 0$. Dùng giả thiết này cho các câu 38, 39.

Câu 38. Nếu (C_m) là một elip có trục lớn ở trên trục hoành thì m phải thỏa mãn điều kiện nào ?

A) $0 < m < 1$. B) $m > 1$. C) $m > 0$. D) $0 < m \neq 1$.

Câu 39. Định m để (C_m) là ảnh của đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$ qua phép co về trục Ox theo hệ số $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

A) $m = \pm 3$. B) $m > 3$. C) $m = 3$. D) $1 < m < 3$.

• Cho elip $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. Dùng giả thiết này cho các câu 40, 41.

Câu 40. Tìm tâm sai của elip biết rằng mỗi tiêu điểm nhìn đoạn thẳng nối hai đỉnh trục nhỏ dưới một góc vuông.

A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. C) $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 41. Nếu mỗi đỉnh của trục nhỏ nhìn đoạn thẳng nối hai tiêu điểm dưới một góc bằng 120^0 thì tâm sai của elip bằng :

A) $\frac{\sqrt{3}}{4}$. B) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

• Cho elip $(E): x^2 + 4y^2 - 4 = 0$. Gọi A_2 là một đỉnh của trục lớn có hoành độ dương. Dùng giả thiết này cho các câu 42, 43.

Câu 42. Hai đường phân giác của các góc của hệ trục tọa độ Oxy cắt (E) tại bốn điểm M, N, P, Q. Tính diện tích của tứ giác MNPQ.

A) $\frac{4}{5}$. B) $\frac{8}{5}$. C) $\frac{16}{5}$. D) $\frac{12}{5}$.

Câu 43. Tam giác đều FGA_2 nội tiếp trong elip (E). Tính tọa độ của hai đỉnh F và G.

A) $F\left(\frac{2}{7}; \frac{2\sqrt{3}}{7}\right), G\left(\frac{2}{7}; \frac{-2\sqrt{3}}{7}\right)$. B) $F\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right), G\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right)$.

C) $F\left(\frac{4}{7}; \frac{8\sqrt{3}}{7}\right), G\left(\frac{4}{7}; -\frac{8\sqrt{3}}{7}\right)$. D) $F\left(\frac{1}{7}; \frac{\sqrt{3}}{7}\right), G\left(\frac{1}{7}; -\frac{\sqrt{3}}{7}\right)$.

Câu 44. Cho họ đường tròn $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + 2m^2 - 1 = 0, m \in R$. Tìm tập hợp các điểm $M(x; y)$ sao cho tương ứng với mỗi điểm M có duy nhất một đường tròn của họ (C_m) đi qua.

A) Elip $(E): \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{1} = 1, -1 \leq m \leq 1$.

B) Elip $(E): \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{2} = 1, -1 \le m \le 1$.

C) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2, -1 \le m \le 1$.

D) Parabol $(P): y = \dfrac{x^2}{2} - 1, -1 \le m \le 1$.

Câu 45. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. Từ điểm $M(x;y)$ trên (E) vẽ MH vuông góc với trục lớn A_1A_2 tại H. Xét các hệ thức sau :

I. $a^2\overline{HM}^2 = b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$;

II. $a^2\overline{HM}^2 = -b^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$;

III. $b^2\overline{HM}^2 = a^2\overline{HA_1}.\overline{HA_2}$.

Hệ thức nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Cả I, II và III sai.

Câu 46. Cho elip $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{x^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. Xét các điểm sau với $t \in R$:

I. $M(a\cos t; b\sin t)$; II. $N(a\sin t; b\cos t)$;

III. $P\left(\dfrac{a}{\sqrt{1+\tan^2 t}}; \dfrac{b}{\sqrt{1+\cot^2 t}}\right)$.

Điểm nào thuộc $elip(E)$?

A) Chỉ I. B) Chỉ I và II.

C) Chỉ II và III. D) Cả I, II và III.

• Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$; gọi $M(x;y)$ là điểm trên (H) và c là nửa tiêu cự. Dùng giả thiết này cho các câu 47, 48, 49, 50, 51.

Câu 47. Xét các mệnh đề sau :

I. Tiêu cự của hyperbol là $2c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

II. Nếu M thuộc nhánh của (H) ở bên phải trục Oy thì :

$MF_1 = a + \dfrac{cx}{a}$ và $MF_2 = a - \dfrac{cx}{a}$;

III. Tâm sai của (H) là $e = \dfrac{c}{a} > 1$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ II và III.

C) Chỉ I và III. D) Cả I, II và III.

Câu 48. Xét các mệnh đề sau :

I. (H) có bốn đỉnh A_1, A_2 ở trên trục Ox và B_1, B_2 ở trên trục Oy ;

II. (H) có trục thực bằng $2a$ và trục ảo bằng $2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$;

III. (H) có đường chéo của hình chữ nhật cơ sở bằng $d = 2\sqrt{a^2 + b^2}$.

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I B) Chỉ I và II

C) Chỉ III D) Cả I, II và III

Câu 49. Xét các mệnh đề sau :

I. (H) có hai đường chuẩn có phương trình là $x = \pm\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$;

II. (H) có hai đường tiệm cận có phương trình là $y = \pm\dfrac{ax}{b}$;

III. Nếu M thuộc nhánh của (H) ở bên trái trục Oy thì :

$MF_1 = -a - \dfrac{cx}{a}$ và $MF_2 = a - \dfrac{cx}{a}$

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ II và III.

C) Chỉ I và III. D) Cả I, II và III.

Câu 50. Xét các mệnh đề sau :

I. (H) có hai trục đối xứng

II. (H) có một tâm đối xứng.

III. Nếu $M(x;y)$ thuộc nhánh của (H) ở bên trái trục Oy thì $MF_1 - MF_2 = 2a$.

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I và II. B) Chỉ III.

C) II và III. D) Cả I, II và III.

Câu 51. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H) có phương trình :

A) $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$. B) $x^2 + y^2 + a^2 + b^2 = 0$.

C) $x^2 + y^2 - a^2 = 0$. D) $x^2 + y^2 - b^2 = 0$.

• Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. Dùng giả thiết này cho các câu 52, 53, 54.

Câu 52. Tâm sai của hyperbol là :

A) $\dfrac{4}{3}$. B) $\dfrac{\sqrt{7}}{2}$. C) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. D) $\dfrac{5}{3}$.

Câu 53. Hai đường tiệm cận của hyperbol là :

A) $y = \pm\dfrac{3x}{4}$. B) $y = \pm\dfrac{16x}{9}$. C) $y = \pm\dfrac{4x}{3}$. D) $y = \pm\dfrac{9x}{16}$.

Câu 54. Hyperbol có hai đường chuẩn là :

A) $x = \pm\dfrac{3}{5}$. B) $x = \pm\dfrac{9}{5}$. C) $x = \pm\dfrac{9}{4}$. D) $x = \pm\dfrac{16}{3}$.

Câu 55. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có trục thực bằng 12 và tâm sai bằng $\dfrac{5}{3}$.

A) $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{8} = 1$. B) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{36} = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. D) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{6} = 1$.

Câu 56. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) có trục ảo bằng 8, tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

A) $\dfrac{x^2}{64} - \dfrac{y^2}{16} = 1$. B) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{64} = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{4} = 1$. D) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{8} = 1$.

Câu 57. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) biết một đỉnh của trục thực là $A(-5;0)$, một tiêu điểm là $F(6;0)$.

A) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{61} = 1$. B) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$.

C) $\dfrac{x^2}{11} - \dfrac{y^2}{25} = 1$. D) $\dfrac{x^2}{61} - \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Câu 58. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) biết một tiêu điểm $F(-7;0)$ và tâm sai bằng 2.

A) $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{147} = 1$. B) $\dfrac{x^2}{147} - \dfrac{y^2}{49} = 1$.

C) $\dfrac{4x^2}{49} - \dfrac{4y^2}{245} = 1$. D) $\dfrac{4x^2}{49} - \dfrac{4y^2}{147} = 1$.

Câu 59. Lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) biết một đỉnh của trục ảo là $B(0;-2)$ và tiêu cự bằng 8.

A) $\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{2}=1$. B) $\dfrac{x^2}{36}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{4}=1$. D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

Câu 60. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) đi qua điểm $M(5;-3)$ và biết khoảng cách giữa hai đỉnh bằng 8.

A) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. B) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$. D) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

Câu 61. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) đi qua điểm $N(-4;3)$ và có tiêu cự bằng 10.

A) $\dfrac{x^2}{10}-\dfrac{y^2}{15}=1$. B) $\dfrac{x^2}{100}-\dfrac{y^2}{225}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{15}-\dfrac{y^2}{10}=1$. D) $\dfrac{x^2}{225}-\dfrac{y^2}{100}=1$.

Câu 62. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) đi qua hai điểm $M(2;\sqrt{6})$ và $N(-3;4)$.

A) $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{1}=1$. B) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{4}=1$. D) $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

Câu 63. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) có một tiêu điểm $F(2;0)$ và dây cung vuông góc với trục Ox tại F có độ dài bằng 6.

A) $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{1}=1$. B) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$. D) $\dfrac{x^2}{12}-\dfrac{y^2}{16}=1$.

Câu 64. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) đi qua điểm $M(3;4)$ và có trục ảo bằng 6.

A) $\dfrac{25x^2}{81}-\dfrac{y^2}{9}=1$. B) $\dfrac{x^2}{81}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{81}=1$. D) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{25y^2}{81}=1$.

• Cho elip $(E): \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Gọi (H) là hyperbol có trục thực ở trên trục hoành và có cùng hình chữ nhật cơ sở với elip (E). Dùng giả thiết này cho các câu $65, 66$.

Câu 65. Phương trình hai đường tiệm cận của hyperbol (H) là :

A) $y=\pm\frac{4}{3}x$. B) $y=\pm\frac{3}{4}x$. C) $y=\pm\frac{9}{16}x$. D) $y=\pm\frac{16}{9}x$.

Câu 66. Phương trình chính tắc của hyperbol (H) là :

A) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$. B) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$.

C) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. D) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$.

Câu 67. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) có trục thực bằng 8 và một đường chuẩn là $5x+16=0$.

A) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$. B) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$.

C) $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}=1$. D) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$.

Câu 68. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) có một tiêu điểm $F(-10;0)$ và một đường chuẩn là $5x-18=0$.

A) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. B) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$.

C) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{8}=1$. D) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{6}=1$.

Câu 69. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) có tâm sai bằng 2 và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 3.

A) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{3}=1$. B) $\frac{x^2}{27}-\frac{y^2}{9}=1$.

C) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$. D) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{27}=1$.

Câu 70. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H) có tâm sai bằng $\frac{\sqrt{5}}{2}$ và một đường chuẩn là $5x-2\sqrt{10}=0$.

A) $\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}=1$. B) $\frac{x^2}{2}-2y^2=1$.

C) $2x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$.   D) $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$.

Câu 71. Có bao nhiêu hyperbol đi qua điểm $M(2;3)$ và nhận hai đường thẳng $2x - 1 = 0$ và $2x + 1 = 0$ làm hai đường chuẩn ?

A) 4.   B) 3.   C) 2.   D) 1.

Câu 72. Cho hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Từ điểm $M(x;y)$ trên (H) vẽ MH và MK lần lượt vuông góc với hai đường tiệm cận của (H). Tính $MH.MK$.

A) $\frac{12}{5}$.   B) $\frac{16}{9}$.   C) $\frac{25}{144}$.   D) $\frac{144}{25}$.

Câu 73. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tích số các khoảng cách đến hai đường thẳng $(D): 5x - 2y$, $(D'): 5x + 2y = 0$ bằng $\frac{100}{29}$.

A) Hyperbol $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{4} = 1$.   B) Hyperbol $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

C) Đường tròn $x^2 + y^2 = 100$.   D) Parabol $y = \frac{25x^2}{4}$.

Câu 74. Cho hai điểm $F_1(-4;0)$ và $F_2(4;0)$. Đường tròn (C) di động bán kính thay đổi tâm I qua F_1 và F_2. Gọi MN là đường kính song song với trục Ox. Tập hợp các điểm M và N là :

A) hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$.   B) đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

C) hyperbol $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1$.   D) đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

Câu 75. Tìm tập hợp các điểm $M(x;y)$ có tỷ số các khoảng cách đến điểm $F(4;0)$ và đường thẳng $(D): x - 1 = 0$ bằng 2.

A) Hyperbol $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.   B) Hyperbol $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

C) Parabol $y^2 = 4x$.   D) Parabol $y^2 = 12x$.

Câu 76. Cho hai đường thẳng (D) và (D') chuyển động lần lượt đi qua hai điểm $A(-2;0)$ và $B(2;0)$. Tìm tập hợp giao điểm $M(x;y)$ của (D) và (D'), biết rằng tích hai hệ số góc của chúng bằng 3.

A) Đường tròn $x^2 + y^2 = 4$.

B) Elip $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$.

C) Hyperbol $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

D) Hyperbol $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 77. Cho đường tròn (C) tâm $F_1(-2;0)$ bán kính $R = 2$. Đường tròn (M) di động tiếp xúc với (C) và đi qua điểm $F_2(2;0)$. Hỏi tâm M của (M) chạy trên đường nào ?

A) Hyperbol (H) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và trục thực $2a = 4$.

B) Hyperbol (H) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và trục thực $2a = 2$.

C) Elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và trục lớn $2a = 4$.

D) Đường tròn (C') đường kính $F_1F_2 = 4$.

Câu 78. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn :

$(C): x^2 + y^2 - \frac{6}{\cos t}.x - 4\tan t.y - \cos 2t + 1 = 0,\ t \in R$.

A) Đường tròn $x^2 + y^2 = 36$.

B) Đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

C) Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.

D) Hyperbol $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Câu 79. Tìm tập hợp các điểm $M\left(\frac{5}{\sin t}; 4\cot t\right)$, $t \in R$.

A) Hyperbol $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

B) Đường tròn $x^2 + y^2 = 25$.

C) Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$.

D) Elip $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

• Cho elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Dùng giả thiết này cho các câu 80, 81.

Câu 80. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H_1) có hai đỉnh là hai tiêu điểm của (E) và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của (E).

A) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{7} = 1$.

B) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{4} = 1$.

C) $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{9} = 1$.

D) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 81. Tìm phương trình chính tắc của hyperbol (H_2) có tiêu cự bằng đường chéo hình chữ nhật cơ sở của (E) và có tâm sai bằng bốn lần tâm sai của (E).

A) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{7}-1$.

B) $\dfrac{7x^2}{25}-\dfrac{y^2}{25}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{7}-\dfrac{y^2}{25}=1$.

D) $\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{7y^2}{25}=1$.

Câu 82. Trong hệ trục Oxy cho hai điểm $M(x;y)$ và $A(2;0)$. Gọi M' là điểm đối xứng của M qua trục Oy. Tìm tập hợp các điểm M sao cho tam giác AMM' vuông tại A.

A) Hyperbol $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$.

B) Đường tròn $x^2+y^2=4$.

C) Hyperbol $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{y^2}{2}=1$.

D) Elip $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$.

• Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$. Dùng giả thiết này cho các câu 83, 84.

Câu 83. Tìm phương trình chính tắc của elip (E) có hình chữ nhật cơ sở là hình chữ nhật cơ sở của hyperbol (H).

A) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

B) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{3}=1$.

D) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

Câu 84. Tìm phương trình chính tắc của elip (C) có trục lớn bằng tiêu cự của hyperbol (H) và có trục nhỏ bằng khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (H).

A) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{10}=1$.

B) $\dfrac{x^2}{256}+\dfrac{y^2}{25}=1$.

C) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{25y^2}{256}=1$.

D) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$.

• Cho hyperbol $(H): \dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$. Dùng giả thiết này cho các câu 85, 86.

Câu 85. Tìm điểm M trên (H) sao cho hai bán kính qua tiêu điểm của M vuông góc nhau.

A) Bốn điểm $M_{1,2}\left(\dfrac{3\sqrt{23}}{4};\pm\dfrac{7}{4}\right)$, $M_{3,4}\left(-\dfrac{3\sqrt{23}}{4};\pm\dfrac{7}{4}\right)$.

B) Hai điểm $M_{1,2}\left(\dfrac{3\sqrt{23}}{4};\pm\dfrac{7}{4}\right)$.

C) Hai điểm $M_{1,2}\left(\pm\frac{3\sqrt{23}}{4};\frac{7}{4}\right)$.

D) Bốn điểm $M_{1,2}\left(\frac{7}{4};\pm\frac{3\sqrt{23}}{4}\right)$, $M_{3,4}\left(-\frac{7}{4};\pm\frac{3\sqrt{23}}{4}\right)$.

Câu 86. Tìm điểm N trên (H) sao cho bán kính qua tiêu điểm bên trái bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm bên phải của (H).

A) Hai điểm $N_{1,2}\left(\frac{3\sqrt{3}}{2};\pm\frac{9}{4}\right)$.
B) Hai điểm $N_{1,2}\left(\frac{27}{4};\pm\frac{\sqrt{455}}{4}\right)$.

C) Hai điểm $N_{1,2}\left(\pm\frac{9}{4};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$.
D) Hai điểm $N_{1,2}\left(\pm\frac{\sqrt{455}}{4};\frac{27}{4}\right)$.

• Cho đường cong $(C_m):(m^2-4)x^2-4y^2=4(m^2-4),\ m\neq\pm2$.

Dùng giả thiết này cho các câu 87, 88.

Câu 87. Nếu (C_m) là một elip thì m phải thỏa mãn điều kiện nào ?

A) $-2<m<2$.
B) $0<m<2$.
C) $-2<m<0$.
D) $-2<m<2$ với $m\neq 0$.

Câu 88. Tìm điều kiện của m để (C_m) là một hyperbol.

A) $-2<m<2$.
B) $-2<m<2$ với $m\neq 0$.
C) $m<-2\vee m>2$.
D) $m<-2\sqrt{2}\vee m>2\sqrt{2}$.

• Cho đường $(C):\frac{x|x|}{9}+\frac{y|y|}{4}=1$. Gọi $M(x;y)$ là một điểm trên (C).

Dùng giọt thiết này cho các câu 89, 90.

Câu 89. Xác định vị trí của M để (C) là một phần của một elip.

A) M thuộc góc phần tư II của hệ trục tọa độ.
B) M thuộc góc phần tư I của hệ trục tọa độ.
C) M thuộc góc phần tư III của hệ trục tọa độ.
D) M thuộc góc phần tư IV của hệ trục tọa độ.

Câu 90. (C) là một phần của một hyperbol có trục thực ở trên trục hoành khi M thuộc góc phần tư nào của hệ trục tọa độ ?

A) IV.
B) II.
C) I.
D) III.

• Cho parabol $(P):y^2=2px,\ p>0$. Dùng giả thiết này cho các câu 91, 92, 93.

Câu 91. Xét các mệnh đề sau :

I. (P) có đỉnh là $O(0;0)$; II. (P) có tiêu điểm là $F\left(-\frac{p}{2};0\right)$;

III. (P) có đường chuẩn là $(D): 2x + p = 0$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) I và III. B) II và III.

C) I và III. D) Cả I, II và III.

Câu 92. Xét các mệnh đề sau :

I. (P) có một trục đối xứng ; II. (P) có một tâm đối xứng ;

III. (P) có hai trục đối xứng.

Mệnh đề nào sai ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Chỉ II và III.

Câu 93. Gọi M là một điểm bất kỳ trên (P). Xét các mệnh đề sau :

I. Khoảng cách từ M đến tiêu điểm F của (P) bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Oy.

II. Vẽ MH vuông góc với đường thẳng $(D): 2x + p = 0$ tại H. Tâm sai của (P) là $e = \frac{MH}{MF}$.

III. Đường tròn (C) tâm M tiếp xúc với đường thẳng $(D): 2x + p = 0$ đi qua F.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) II và III. C) I và II. D) Chỉ I và III.

Câu 94. Gọi AB là dây cung đi qua tiêu điểm F của parabol $(P): y^2 = 2px,\ p > 0$. Từ trung điểm I của AB vẽ IJ vuông góc với đường chuẩn của (P). Ta có:

A) $IJ = AB$. B) $IJ = \frac{3AB}{2}$. C) $IJ = \frac{AB}{2}$. D) $IJ = 2AB$.

Câu 95. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) có tiêu điểm F ở trên trục Ox và cách đỉnh O một đoạn bằng 3.

A) $y^2 = 12x$. B) $y^2 = 6x$. C) $y^2 = 3x$. D) $y^2 = \frac{3x}{2}$.

Câu 96. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) có đường chuẩn là $(D): x + 4 = 0$.

A) $y^2 = 2x$. B) $y^2 = 4x$. C) $y^2 = 8x$. D) $y^2 = 16x$.

Câu 97. Tìm phương trình chính tắc của parabol (P) đi qua điểm $M\left(\frac{3}{2};-2\right)$.

A) $y^2 = \frac{4x}{3}$. B) $y^2 = \frac{2x}{3}$. C) $y^2 = \frac{8x}{3}$. D) $y^2 = \frac{16x}{3}$.

Câu 98. Cho parabol $(P): y^2 = 8x$. Đường thẳng (D) có hệ số góc $k \neq 0$ đi qua tiêu điểm F của (P) cắt (P) tại A và B. Tính $y_A.y_B$.

A) 16. B) -16. C) -8. D) 8.

Câu 99. Tìm tập hợp các tâm $M(x;y)$ của đường tròn (C) di động có bán kính thay đổi đi qua điểm $F(3;0)$ và luôn luôn tiếp xúc với đường thẳng $(D): x+3=0$.

A) Parabol $y^2 = 12x$.

B) Đường tròn $x^2 + y^2 - 6x - 3 = 0$.

C) Parabol $y^2 = 6x$.

D) Elip $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Câu 100. Tìm tập hợp các tâm I của đường tròn :

$(C_m): x^2 + y^2 - 2m^2x + 8my + 13m^2 + 4 = 0,\ m \in R$.

A) Parabol $y^2 = 8x, x \geq 1$. B) Đường tròn $x^2 + y^2 = 16$.

C) Hyperbol $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$. D) Parabol $y^2 = 16x$ với $x \geq 1$.

ĐÁP ÁN

1. B	2. D	3. A	4. C	5. D	6. B	7.C	8.A
9. B	10. D	11. C	12. A	13. D	14. B	15.C	16.A
17. B	18. D	19. C	20. B	21. A	22. D	23.C	24.A
25. B	26. C	27. D	28. A	29. C	30. B	31.A	32.D
33. C	34. B	35. A	36. C	37. D	38. B	39.C	40.A
41. D	42. C	43. B	44. A	45. B	46. D	47.C	48.B
49. C	50. B	51. A	52. D	53. C	54.B	55.C	56.A
57. B	58. D	59. C	60. B	61. A	62.D	63.C	64.A
65. B	66. C	67. D	68. A	69. C	70.B	71.C	72.D
73. B	74. A	75. A	76. C	77. B	78.D	79.A	80.C
81. B	82. A	83. D	84. C	85. A	86.B	87.D	88.C

89. B	90. A	91. C	92. D	93. B	94.C	95.A	96.D
97. C	98. B	99. A	100. D				

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. I và III đúng. Chọn B

Câu 2. I. sai, vì tiêu cự $2c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $a > b$; II. sai, vì tâm sai $e = \frac{c}{a}$;

III. sai, vì $MF_1 = a + \frac{cx}{a}$, $MF_2 = a - \frac{cx}{a} \Rightarrow MF_1^2 - MF_2^2 = 4cx$.

Chọn D

Câu 3. I và II đúng. Chọn A

Câu 4. (E) có một tâm đối xứng là gốc tọa độ O và có hai trục đối xứng là trục Ox và trục Oy. Chọn C

Câu 5. Phương trình của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. $A(-4;0)$ là một đỉnh trục lớn $\Rightarrow a = 4$; $F(3;0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 3$.

Do đó $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 9 = 7$. Vậy $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Chọn D

Câu 6. Phương trình của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$. $B(0;3)$ là một đỉnh trục nhỏ $\Rightarrow b = 3$, $F(-2;0)$ là một tiêu điểm $\Rightarrow c = 2$. Do đó $a^2 = b^2 + c^2 = 13$. Vậy $(E): \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn B

Câu 7. Phương trình của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b > 0$.

Tiêu cự $2c = 8 \Leftrightarrow c = 4$; tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow b^2 = 9$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn C

Câu 8. Phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Phương trình các cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x = \pm a = \pm 5$, $y = \pm b = \pm 4$, nên $a = 5,\ b = 4$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Chọn A

Câu 9. Phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Tiêu điểm $F(-2;0)$ nên $c = 2$, do đó $b^2 = a^2 - 4$. $M(2;3)$ thuộc (E). Ta có :

$$\frac{4}{a^2} + \frac{9}{a^2 - 4} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 17a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \text{ (loại)}$$

hoặc $a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 12$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$.

Cách khác : $2a = MF_1 + MF_2 = \sqrt{16 + 9} + \sqrt{9} = 8 \Leftrightarrow a = 4$. Suy ra :

$b^2 = a^2 - c^2 = a^2 - 4 = 12$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{12} = 1$. Chọn B

Câu 10. Phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Trục lớn $2a = 10 \Rightarrow a = 5$; tiêu cự $2c = 6 \Rightarrow c = 3$.

Do đó $b^2 = a^2 - c^2 = 16$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Chọn D

Câu 11. Phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. (E) nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 9$, nên $a^2 = 9$. (E) ngoại tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 4$, nên $b^2 = 4$. Vậy $(E): \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$. Chọn C

Câu 12. Phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. $A(5;0)$ là một đỉnh của trục lớn, nên $a = 5$. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở có bán kính $R^2 = a^2 + b^2 = 41 \Leftrightarrow b^2 = 41 - 25 = 16$.

Vậy $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$. Chọn A

Câu 13. Phương trình của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Một cạnh của hình chữ nhật cơ sở là $x + 3 = 0 \Rightarrow a = 3$.

Đường chéo bằng $32 \Rightarrow a^2 + b^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 16 - a^2 = 16 - 9 = 7$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{7} = 1$. Chọn D

Câu 14. (E) có nửa trục lớn $a = 5$. Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{4}{5} \Rightarrow e = 4$. Do đó :

$b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 16 = 9$. Vậy $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn B

Câu 15. Phương trình của $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$. Trục nhỏ $2b = 6 \Leftrightarrow b = 3$. (E) qua $M(-2\sqrt{5}\,;2)$ nên $\frac{20}{a^2} + \frac{4}{9} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 36$.

Vậy $(E): \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn C

Câu 16. Phương trình của $(E): Ax^2 + By^2 = 1$ với $A = \frac{1}{a^2}$ và $B = \frac{1}{b^2}$. (E) qua $M(4\,;-\sqrt{3})$ và $N(2\sqrt{2}\,;3)$ nên :

$$\begin{cases} 16A + 3B = 1 \\ 8A = 9B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 48A + 9B = 3 \\ 8A + 9B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{1}{20},\ B = \frac{1}{15}.$$

Vậy $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{15} = 1$. Chọn A

Câu 17. Trục lớn $2a = 10 \Leftrightarrow a = 5$. Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow c = 3$. Ta có : $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 = 16 \Rightarrow b = 4$. Vậy trục nhỏ $2b = 8$. Chọn B

Câu 18. Tiêu điểm $F_2(c\,;a)$. Dây cung MN vuông góc với trục lớn A_1A_2 tại F_2, nên $x_M = x_N = c$. Do đó :

$$MN = 2\left(a - \frac{c}{a}x_M\right) = 2\left(\frac{a^2 - c^2}{a}\right) = \frac{2b^2}{a}.$$ Chọn D

Câu 19. Ta có : $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6$. Từ $MF_1 + MF_2 = 2a = 12$ ta có : $MF_2 = 5$.

Chọn C

Câu 20. Ta có : $b^2 = 27 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 9 \Rightarrow c = 3$. Do đó :

$$MF_1 = a + \frac{cx}{a} = 7 \Leftrightarrow 6 + \frac{3x}{6} = 7 \Leftrightarrow x = 2.$$

Thay vào phương trình elip, ta có :

$$\frac{4}{36} + \frac{y^2}{27} = 1 \Leftrightarrow y^2 = 24 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{6}.$$

Vậy, có hai điểm $M_1(2;2\sqrt{6})$, $M_2(2;-2\sqrt{6})$. Chọn B

Câu 21. Ta có : $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$, $b^2 = 5 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 4 \Rightarrow c = 2$. Do đó :

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 3 + \frac{2x}{3} = 2\left(3 - \frac{2x}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Thay $x = \frac{3}{2}$ vào $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow y^2 = \frac{15}{4} \Rightarrow y = \pm\frac{\sqrt{15}}{2}$.

Vậy, có hai điểm $M_1\left(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{3}{2};-\frac{\sqrt{15}}{2}\right)$. Chọn A

Câu 22. Ta có : $a^2 = 100 \Rightarrow a = 10$, $b^2 = 36 \Rightarrow c^2 = a^2 - b^2 = 64 \Rightarrow c = 8$.

$$MF_1.MF_2 + OM^2 = \left(10 + \frac{8x}{10}\right)\left(10 - \frac{8x}{10}\right) + x^2 + y^2 = 100 + \frac{36x^2}{100} + y^2$$

$$= 100 + 36\left(\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36}\right) = 100 + 36 = 136.$$ Chọn D

Câu 23. Ta có : $(E): \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1 \Rightarrow a^2 = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5}$; $b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$.

Đường tròn ngoại tiếp elip có tâm O, bán kính $R_1 = a = 2\sqrt{5}$, đường tròn nội tiếp elip có tâm O, bán kính $R_2 = b = 2$. Chúng có phương trình lần lượt là $x^2 + y^2 = 20$; $x^2 + y^2 = 4$. Chọn C

Câu 24. Ta có : $c^2 = a^2 - b^2 = 16 \Rightarrow c = 4$. M thuộc (E) và thuộc đường tròn (C) tâm O bán kính $R = 4$. Vậy, tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 = 20 \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x^2 = 16 - y^2 = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{15} \\ y = \pm 1. \end{cases}$$

Vậy, có bốn điểm $M_1(\sqrt{15};1)$, $M_2(-\sqrt{15};1)$, $M_3(\sqrt{15};-1)$, $M_4(-\sqrt{15};-1)$.

Chọn A

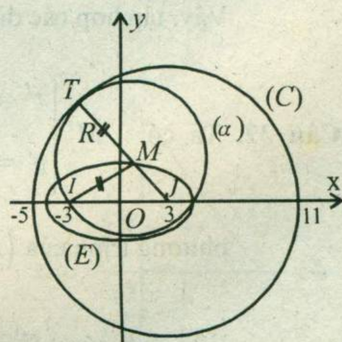
Câu 25. (E) và (C) có hai điểm chung khi và chỉ khi (C) nội tiếp hoặc ngoại tiếp (E) tại các đỉnh của (E). Nội tiếp $\Leftrightarrow b = R$; ngoại tiếp $\Leftrightarrow a = R$.

Chọn B

Câu 26. (E) và (C) có bốn điểm chung khi và chỉ khi (E) và (C) cắt nhau tại bốn điểm. Ta có : $b < R < a$.

Chọn C

Câu 27. (C) có tâm $J(3;0)$, bán kính $R = 8$. Gọi T là tiếp điểm của (C) và (α), ta có : $MI = r$, $MJ = 8 - r$.
Do đó : $MI + MJ = 8$. Vậy, tập hợp các tâm M của (α) là elip (E) có tâm O, hai tiêu điểm là $I(-3;0)$ và $J(3;0)$ có độ dài trục lớn bằng 8.



Chọn D

Câu 28. Ta có : $M\begin{cases} x = a = 5\cos 2t \\ y = b = 4\sin 2t \end{cases} \Rightarrow \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1,\ t \in R$.

Vậy, tập hợp các tâm M là elip $(E): \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Chọn A

Câu 29. Đặt $t = \tan\dfrac{a}{2}$, ta có : $M\begin{cases} x = 4.\dfrac{1-t^2}{1+t^2} = 4\cos a \\ y = 3.\dfrac{2t}{1+t^2} = 3\sin a \end{cases}$, $a \in R$.

Do đó : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$. Vậy, tập hợp các điểm M là elip (E) : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Chọn C

Câu 30. Ta có : $M'\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{y}{2}\end{cases}\Leftrightarrow M\begin{cases}x=x'\\ y=2y'\end{cases}$. Thay vào phương trình của

$(C): x^2+y^2=36$, ta có : $x'^2+4y'^2=36\Leftrightarrow\dfrac{x'^2}{36}+\dfrac{y'^2}{9}=1$.

Vậy, tập hợp các điểm M' là elip $(E): \dfrac{x'^2}{36}+\dfrac{y'^2}{9}=1$. Chọn B

Câu 31. Ta có : $M'\begin{cases}x'=x\\ y'=\sqrt{3}y\end{cases}\Leftrightarrow M\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{y'}{\sqrt{3}}\end{cases}$. Thay vào phương trình của

$(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$, ta có : $\dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{12}=1$.

Vậy, tập hợp các điểm M' là elip $(E'): \dfrac{x'^2}{16}+\dfrac{y'^2}{12}=1$. Chọn A

Câu 32. Ta có : $M'\begin{cases}x'=x\\ y'=\dfrac{4y}{3}\end{cases}\Leftrightarrow M\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{3y'}{4}\end{cases}$ với M thuộc (E). Thay vào

phương trình của $(E): \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$, ta có : $x'^2+y'^2=16$.

Vậy, ảnh của (E) qua phép co về trục Ox theo hệ số $k=\dfrac{4}{3}$ là đường

tròn $(C): x'^2+y'^2=16$. Chọn D

Câu 33. Ta có: $M'\begin{cases}x'=x\\ y'=m^2y\end{cases}\Leftrightarrow M\begin{cases}x=x'\\ y=\dfrac{y'}{m^2}\end{cases}$. Thay vào phương trình của

$(C): x^2+y^2=R^2$, ta có : $(E): \dfrac{x'^2}{R^2}+\dfrac{y'^2}{R^2m^4}=1$. (E) là elip có trục

lớn ở trên Ox khi và chỉ khi :

$R^2>R^2m^4\Leftrightarrow m^4-1<0$

$\Leftrightarrow(m^2+1)(m^2-1)<0\Leftrightarrow m^2-1<0\Leftrightarrow -1<m\neq 0<1$. Chọn C

Câu 34. Ta có : $(E): \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1\Rightarrow a^2=4>b^2=2\Rightarrow c^2=2\Rightarrow c=\sqrt{2}$.

Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, hai đường chuẩn $(D_{1,2}): x = \pm\frac{a}{e} = \pm 2\sqrt{2}$.

Chọn B

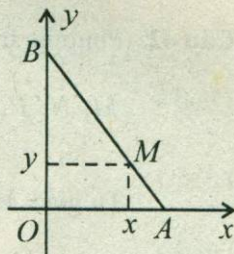
Câu 35. Vẽ MH vuông góc với (D). Ta có :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow 4\left[(x-2)^2 + y^2\right] = (x-8)^2$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 4y^2 = 48 \Leftrightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

Vậy, tập hợp các điểm M là elip $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$. Chọn A

Câu 36. Có : $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_A - 2x = x \\ -2y = -y_B + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{3x}{2}; \\ x_B = 3y \end{cases}$



$$AB^2 = \left(0 - \frac{3x}{2}\right)^2 + (3y-0)^2 = 144$$

$$\Leftrightarrow \frac{9x^2}{4} + 9y^2 = 144 \Leftrightarrow \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Vậy, tập hợp các điểm M là elip $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$. Chọn C

Câu 37. Ta có : $M'\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \Leftrightarrow M\begin{cases} x = x' \\ y = \frac{y'}{k} \end{cases}$.

Thay vào phương trình $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$, ta có : $(C): \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4k^2} = 1$.

Để (E) trùng với (C), ta phải có $4k^2 = 16 \Leftrightarrow k = \pm 2$. Chọn D

Câu 38. Ta có : $(C_m): \frac{x^2}{m^2} + \frac{y^2}{m} = 1$. (C_m) là một elip có trục lớn ở trên trục hoành khi và chỉ khi :

$m^2 > m \Leftrightarrow m^2 - m > 0 \Leftrightarrow m(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$ (vì $m > 0$).

Chọn B

Câu 39. Gọi $M'(x';y')$ là ảnh của $M(x;y)$ trong phép co về trục Ox theo hệ số $k = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, ta có : $M\begin{cases} x = x' \\ y = \sqrt{3}y'. \end{cases}$ Thay vào phương trình của $(C): x^2 + y^2 = 9$, ta có $(C): \dfrac{x'^2}{9} + \dfrac{y'^2}{3} = 1$. Nên (C_m) trùng với $(C) \Leftrightarrow m^2 = 9$ và $m = 3 \Leftrightarrow m = 3$. Chọn C

Câu 40. Tam giác $F_2B_1B_2$ vuông tại F_2, với $B_1B_2 = 2b$ là trục nhỏ. Ta có : $b = c$ và $a^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow a^2 = 2c^2 \Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Chọn A

Câu 41. Ta có : $\widehat{OB_2F_2} = 60^0$ và $B_2F_2 = a$. Tam giác vuông OB_2F_2 vuông tại O. Từ đó suy ra $\sin 60^0 = \dfrac{c}{a} \Rightarrow e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Chọn D

Câu 42. Phương trình hai đường phân giác là $y = \pm x$. Hoành độ giao điểm $M, N, P, Q : x^2 + 4x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow y = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Tứ giác $MNPQ$ là hình vuông có cạnh là $2|x| = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

Diện tích $S = 4x^2 = \dfrac{16}{5}$. Chọn C

Câu 43. Ta có : $(E): \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow A_2(2;0)$. Hai cạnh FA_2 và GA_2 đối xứng nhau qua trục Ox và hợp với trục Ox một góc bằng $\pm 60^0$. Phương trình FA_2 và GA_2 là $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$. Hoành độ giao điểm của FA_2 và GA_2 và elip (E):

$$x^2 + \frac{4}{3}(x^2 - 4x + 4) - 4 = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 16x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{7} \vee x = 2.$$

Suy ra $y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\left(\dfrac{2}{7} - 2\right) = \pm\dfrac{4\sqrt{3}}{7}$.

Vậy $F\left(\dfrac{2}{7};\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$, $G\left(\dfrac{2}{7};-\dfrac{4\sqrt{3}}{7}\right)$. Chọn B

Câu 44. Ta có : $a = m$, $b = 0$, $c = 2m^2 - 1$. $\left(C_m\right)$ là đường tròn khi và chỉ khi :

$$a^2 + b^2 - c \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$$

Ta viết : $$2m^2 - 2xm + x^2 + y^2 - 1 = 0. \quad (1)$$

Có duy nhất một đường tròn qua $M \Leftrightarrow (1)$ có một nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow \Delta' = -x^2 - 2y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$. Vậy tập hợp các điểm M

là elip (E): $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{1} = 1$ với $-1 \leq m \leq 1$. Chọn A

Câu 45. Ta có : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow a^2y^2 = b^2(a^2 - x^2) = b^2(a + x)(a - x)$.

Với $\overline{HM} = y$, $\overline{HA_1} = -a - x$, $\overline{HA_2} = a - x$, suy ra :

$$a^2\overline{HM}^2 = -b^2\overline{HA_1}.\overline{HB}.$$ Chọn B

Câu 46. Tọa độ ba điểm M, N, P đều thỏa mãn phương trình của elip (E).

Chọn D

Câu 47. I và III đúng ; II sai, vì $MF_2 = -a + \dfrac{cx}{a}$. Chọn C

Câu 48. I và II sai. Chọn B

Câu 49. I và III đúng ; II sai, vì phương trình hai tiệm cận là $y = \pm\dfrac{bx}{a}$. Chọn C

Câu 50. I đúng, vì hai trục Ox và Oy ; (H) đúng, vì gốc tọa độ O ; III sai, vì M thuộc nhánh trái của (H) thì $x \leq -a$ nên :

$$MF_2 > MF_1 \Rightarrow MF_2 - MF_1 = 2a.$$ Chọn B

Câu 51. Đường tròn ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của (H) có tâm O, bán kính $R = c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Vậy phương trình là :

$$x^2 + y^2 = c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0.$$ Chọn A

Câu 52. Ta có : $a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$; $b^2 = 16 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 = 24 \Rightarrow c = 5$.

Tâm sai của hyperbol là $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{5}{3}$. Chọn D

Câu 53. Hai đường tiệm cận của hyperbol có phương trình :

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=0 \Leftrightarrow y=\pm\frac{4}{3}x.$$ Chọn C

Câu 54. Ta có : $a^2=9,\ c=5$. Phương trình hai đường chuẩn là :

$$x=\pm\frac{a^2}{c}=\pm\frac{9}{5}.$$ Chọn B

Câu 55. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, $a>0$ và $b>0$. Ta có trục thực $2a=12 \Leftrightarrow a=6$. Tâm sai $e=\frac{c}{a}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow c=\frac{5a}{3}=10$. Nửa trục ảo $b^2=c^2-a^2=100-36=64$. Vậy $(H): \frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$. Chọn C

Câu 56. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0$ và $b>0$. Trục ảo $2b=8 \Leftrightarrow b=4$. Tâm sai $e=\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{c}{a} \Leftrightarrow c=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Ta có : $c^2=a^2+b^2 \Leftrightarrow \frac{5a^2}{4}=a^2+16 \Leftrightarrow a^2=64$.

Vậy $(H): \frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{16}=1$. Chọn A

Câu 57. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0$ và $b>0$. $A(-5;0)$ là một đỉnh của trục thực nên $a=5$; $F(6;0)$ là một tiêu điểm nên $c=6$.

Ta có : $b^2=c^2-a^2=36-25=11$. Vậy $(H): \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{11}=1$. Chọn B

Câu 58. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, a>0$ và $b>0$. $F(-7;0)$ là một tiêu điểm nên $c=7$; tâm sai $e=\frac{c}{a}=2$ nên $a=\frac{7}{2}$. Ta có : $b^2=c^2-a^2=49-\frac{49}{4}=\frac{147}{4}$. Vậy $(H): \frac{4x^2}{49}-\frac{4y^2}{147}=1$. Chọn D

Câu 59. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. $B(0;-2)$ là một đỉnh của trục ảo nên $b = 2$; tiêu cự $2c = 8$ nên $c = 4$. Ta có : $a^2 = c^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$. Vậy $(H): \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{4} = 1$. Chọn C

Câu 60. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Độ dài trục thực là $2a = 8$ nên $a = 4$. (H) đi qua $M(5;-3)$ nên : $\frac{25}{16} - \frac{9}{b^2} = 1$.

Suy ra : $b^2 = 16$. Vậy $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$. Chọn B

Câu 61. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Tiêu cự $2c = 10 \Leftrightarrow c = 5$. Ta có : $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - a^2$. (H) qua $N(-4;3)$, nên : $\frac{16}{a^2} - \frac{9}{25 - a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 50a^2 + 400 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 10$. Suy ra :

$b^2 = 25 - 10 = 15$ hay $a^2 = 40 \Rightarrow b^2 = 25 - 40$ (loại).

Vậy $(H): \frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{15} = 1$. Chọn A

Câu 62. Phương trình của $(H): Ax^2 - By^2 = 1$ với $A = \frac{1}{a^2}$, $B = \frac{1}{b^2}$, $a > 0$ và $b > 0$. (H) đi qua $M(2;\sqrt{6})$ và $N(-3;4)$, nên ta có hệ phương trình :

$\begin{cases} 4A - 6B = 1 \\ 9A - 16B = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{2} \end{cases}$. Vậy $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{2} = 1$. Chọn D

Câu 63. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Một tiêu điểm $F(2;0)$, nên $c = 2$. Dây cung MN vuông góc với trục Ox và $MN = 6$,

nên $x_M = x_N = 2$ và $y_M = -y_N = \frac{6}{2} = 3$. (H) qua $M(2;3)$, nên

$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{4-a^2} = 1 \Leftrightarrow a^4 - 17a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1$. Suy ra :

$b^2 = c^2 - a^2 = 4 - 1 = 3$ hay $a^2 = 16 \Rightarrow b^2 = 4 - 16$ (loại).

Vậy $(H): \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$. Chọn C

Câu 64. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Trục ảo bằng $2b = 6$, nên $b = 3$. (H) qua $M(3;4)$, nên $\frac{9}{a^2} - \frac{16}{9} = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{81}{25}$.

Vậy $(H): \frac{25x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn A

Câu 65. Hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở của elip (E) là hai đường tiệm cận của hyperbol (H). Ta có : $a^2 = 16 \Rightarrow a = 4$; $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$.

Vậy $y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{3x}{4}$. Chọn B

Câu 66. Trục lớn của elip là trục thực của hyperbol và trục nhỏ của elip là trục ảo của hyperbol.

Vậy, phương trình của hyperbol $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn C

Câu 67. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Trục thực $2a = 8$, nên $a = 4$. Đường chuẩn $5x + 16 = 0$ hay $x = -\frac{16}{5} = -\frac{a^2}{c} = -\frac{16}{c}$, nên $c = 5$. Ta có :

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Vậy $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Chọn D

Câu 68. Phương trình của $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Một tiêu điểm $F(-10;0)$, nên $c = 10$. Đường chuẩn $5x - 18 = 0$ hay $x = \frac{a^2}{c} = \frac{18}{5}$.

Suy ra : $a^2 = 36$, nên $b^2 = c^2 - a^2 = 64$.

Vậy $(H): \dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{64} = 1$. Chọn A

Câu 69. Phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > 0$ và $b > 0$. Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = 2$, nên $c = 2a$. Khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng

$$\frac{2a^2}{c} = 3 \Leftrightarrow \frac{2a^2}{2a} = 3, \text{ nên } a = 3 \Rightarrow c = 6.$$

Ta có : $b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 9 = 27$. Vậy $(H): \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{27} = 1$. Chọn C

Câu 70. Phương trình của $(H): \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Tâm sai $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$; đường chuẩn $x = \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{2\sqrt{10}}{5}$, nên $a = \sqrt{2}$. Ta có :

$c = \dfrac{a\sqrt{5}}{2} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$, do đó $b^2 = c^2 - a^2 = \dfrac{5}{2} - 2 = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $(H): \dfrac{x^2}{2} - 2y^2 = 1$. Chọn B

Câu 71. Phương trình hypebol có dạng (*H*) : $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$ và $b > 0$. Một đường chuẩn $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a^2}{c} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = 2a^2 \Rightarrow b^2 = 4a^4 - a^2$.

Mặt khác, (H) đi qua $M(2;3)$

$$\Rightarrow \frac{4}{a^2} - \frac{9}{a^4 - a^2} = 1 \Leftrightarrow 4a^4 - 17a^2 + 13 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = \dfrac{13}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2 = 3 \\ b^2 = 39. \end{array}\right.$$

Vậy, có hai hypebol có phương trình

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1 \text{ và } \frac{x^2}{13} - \frac{y^2}{39} = 1.$$ Chọn C

Câu 72. Phương trình hai đường tiệm cận của (*H*) : $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 0$ hay $3x \pm 4y = 0$.

Ta có : $MH = \dfrac{|3x + 4y|}{5}$; $MK = \dfrac{|3x - 4y|}{5}$.

Do đó : $MH.MK = \frac{|3x+4y|}{5} \cdot \frac{|3x-4y|}{5} = \frac{9x^2-16y^2}{25}$.

Lại có : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 16y^2 = 144$.

Vậy $MH.MK = \frac{144}{25}$. Chọn D

Câu 73. Vẽ MI và MJ lần lượt vuông góc với (*D*) và (D'), ta có :

$$IM = \frac{5x-2y}{\sqrt{29}} \text{ và } JM = \frac{5x+2y}{\sqrt{29}}.$$

Do đó : $\overline{IM}.\overline{JM} = \frac{25x^2-4y^2}{29} \Leftrightarrow \frac{25x^2-4y^2}{29} = \frac{100}{29} \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Vậy, tập hợp cần tìm là hypebol (*H*) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{25} = 1$.

Câu 74. Từ *M* vẽ *MH* vuông góc với trục *Ox*, *MH* là tiếp tuyến của (*C*) tại $M(x,y)$.

Ta có :

$\overline{MH}^2 = \overline{HF_1}.\overline{HF_2}$

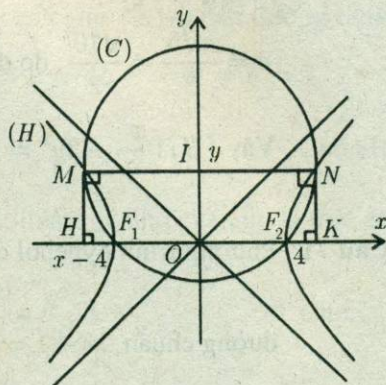
$\Leftrightarrow y^2 = (-4-x)(4-x)$

$= -16 + x^2$.

Vậy, tập hợp cần tìm là hypebol (*H*) :

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Tương tự với điểm *N*. Chọn A



Câu 75. Vẽ *MH* vuông góc với (*D*). Ta có :

$\frac{MF}{MH} = 2 \Leftrightarrow MF = 2MH \Leftrightarrow MF^2 = 4MH^2$

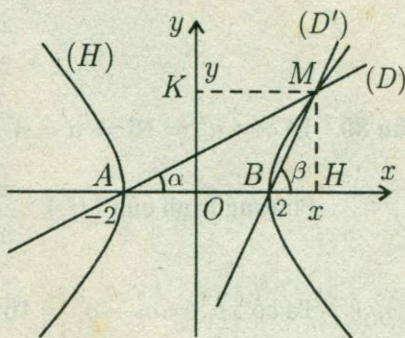
$(x-4)^2 + y^2 = 4(x-1)^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$

Vậy, tập hợp cần tìm là hypebol (*H*) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Chọn A

Câu 76. Hệ số góc của (*D*) và (D') là :

$$k = \tan\alpha = \frac{y}{x+2};$$

$$k' = \tan\beta = \frac{y}{x-2}.$$



Ta có : $k.k' = \frac{y}{x+2}\cdot\frac{y}{x-2} = 3$

$\Leftrightarrow \frac{y^2}{x^2-4} = 3 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$.

Vậy, tập hợp các điểm M là hypebol

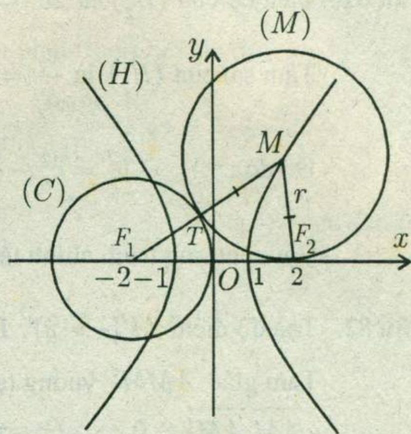
$(H) : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$. Chọn C

Câu 77. Ta có :

$MF_1 = MT + TF_1 = r + 2$

$MF_2 = r \Rightarrow |MF_1 - MF_2| = 2$.

Vậy M chạy trên hypebol (H) có hai tiêu điểm là F_1 và F_2 ; tiêu cự $F_1F_1 = 2c = 4$; độ dài trục thực là $2a = 2$. Chọn B



Câu 78. Ta có : $a = \frac{3}{\cos t}$; $b = 2\tan t$; $c = 1 - \cos 2t \Rightarrow a^2 + b^2 - c > 0, \forall t$.

Do đó, (C) luôn luôn là đường tròn. Toạ độ tâm I :

$$I\begin{cases} x = \frac{3}{\cos t} \\ y = 2\tan t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{9}{\cos^2 t} = 9(1+\tan^2 t) \\ y^2 = 4\tan^2 t \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

Vậy, tập hợp các tâm I là hypebol $(H) : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$. Chọn D

Câu 79. Ta có : $\begin{cases} x = \frac{5}{\sin t} \\ y = 4\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{25} = \frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \cos^2 t \\ \frac{y^2}{16} = \cos^2 t \end{cases}, \forall t$.

Do đó : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Vậy, tập hợp cần tìm là hypebol (H) :

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$$ Chọn A

Câu 80. Ta có : $a^2=16\Rightarrow a=4$; $b^2=9\Rightarrow c^2=a^2-b^2=7\Rightarrow c=\sqrt{7}$.

Phương trình của (H_1) : $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$, nên $a_1=c=7$ và $c_1=a=4$.

Ta có : $b_1^2=c_1^2-a_1^2=16-7=9$. Vậy (H_1) : $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{9}=1$. Chọn C

Câu 81. Tiêu cự của (H_2) là $2c_2=2\sqrt{a^2+b^2}=10\Rightarrow c_2=5$.

Tâm sai của (H_2) là $\frac{c_2}{a_2}=4e=\frac{4\sqrt{7}}{4}=\sqrt{7}\Rightarrow a_2=\frac{5}{\sqrt{7}}$.

Do đó : $b_2^2=c_2^2-a_2^2=25-\frac{25}{7}=\frac{150}{7}$.

•Vậy, phương trình chính tắc của (H_2) : $\frac{7x^2}{25}-\frac{7y^2}{150}=1$. Chọn B

Câu 82. Toạ độ điểm $M'(-x;y)$. Ta có : $\overrightarrow{AM}=(x-2;y)$, $\overrightarrow{AM'}=(-x-2;y)$.

Tam giác AMM' vuông tại A nên :

$\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AM'}=0\Leftrightarrow -(x-2)(x+2)+y^2=0\Leftrightarrow x^2-y^2=4$.

Vậy, tập hợp các điểm M là hypebol (H) : $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1$. Chọn A

Câu 83. Trục lớn của elip là trục thực của (H), nên $a_1=a=4$. Trục nhỏ của elip là trục ảo của (H), nên $b_1=b=3$.

Vậy, phương trình của elip (E): $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Chọn D

Câu 84. Ta có : $c^2=a^2+b^2=16+9=25\Rightarrow c=5$. Trục lớn của elip (C) bằng tiêu cự của (H), nên $a_1=c=5$. Trục nhỏ của (C) bằng khoảng cách giữa hai đường chuẩn của (H), nên $2b_1=2.\frac{a^2}{c}=2.\frac{16}{5}\Leftrightarrow b_1=\frac{16}{5}$.

Vậy, phương trình của elip (C) : $\frac{x^2}{25}+\frac{25y^2}{256}=1$. Chọn C

Câu 85. Toạ độ của M là nghiệm của hệ hai phương trình :

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1\\ x^2+y^2=9+7=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^2-9y^2=63\\ 9x^2+9y^2=144\end{cases}$$

$\Rightarrow x^2=\dfrac{9.23}{16}\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{3\sqrt{23}}{4}$ và $y^2=\dfrac{49}{16}\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{7}{4}$.

Vậy, có bốn điểm $M_{1,2}\left(\dfrac{3\sqrt{23}}{4};\pm\dfrac{7}{4}\right)$, $M_{3,4}\left(-\dfrac{3\sqrt{23}}{4};\pm\dfrac{7}{4}\right)$. Chọn A

Câu 86. Ta có : $a^2=9\Rightarrow a=3$, $c^2=9+7=16\Rightarrow c=4$. Theo giả thiết : $NF_1=2NF_2$, nên N thuộc nhánh bên phải trục Oy. Do đó :

$\dfrac{4}{3}x+3=2\left(\dfrac{4x}{3}-3\right)\Leftrightarrow x=\dfrac{27}{4}\Rightarrow\dfrac{y^2}{7}=\dfrac{81}{16}-1\Leftrightarrow y=\pm\dfrac{\sqrt{455}}{4}$.

Vậy, có hai điểm $N_{1,2}\left(\dfrac{27}{4};\pm\dfrac{\sqrt{455}}{4}\right)$. Chọn B

Câu 87. Ta có : (C_m): $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4-m^2}=1$. (C_m) là một elip khi và chỉ khi :

$\begin{cases}4>4-m^2\\ 4-m^2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2>0\Rightarrow m\neq 0\\ -2<m<2\end{cases}\Leftrightarrow -2<m<2$ và $m\neq 0$. Chọn D

Câu 88. Ta có : (C_m): $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{m^2-4}=1$. (C_m) là một hypebol khi và chỉ khi :

$m^2-4>0\Leftrightarrow m<-2\cup m>2$. Chọn C

Câu 89. (C) là một phần của một elip khi và chỉ khi $x>0$ và $y>0$:

$$(C):\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Vậy, M thuộc góc phần tư thứ nhất của hệ trục toạ độ. Chọn B

Câu 90. (C) là một phần của một hypebol có trục thực ở trên trục hoành khi và chỉ khi $x>0$ và $y<0$: (C): $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$. Vậy M thuộc góc phần tư thứ tư của hệ trục toạ độ. Chọn A

Câu 91. I và III đúng. Chọn C

Câu 92. II và III sai ; I đúng : trục đối xứng là trục Ox. Chọn D

Câu 93. II và III đúng I sai. Chọn B

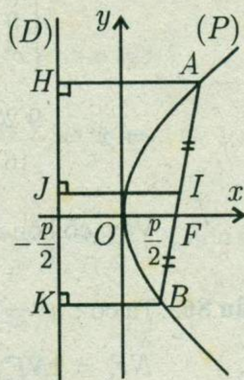
Câu 94. Từ A và B vẽ AH và BK vuông góc với đường chuẩn (D). Hình thang vuông $AHKB$ có IJ la đường trung bình, nên :

$$IJ = \frac{1}{2}(AH + BK).$$

A và B thuộc parabol, nên :

$$AH = AF,\ BK = FB.$$

Vậy $IJ = \dfrac{1}{2}(AF + FB) = \dfrac{AB}{2}$. Chọn C



Câu 95. Ta có : $OF = 3 = \dfrac{p}{2} \Rightarrow$ tham số tiểu $p = 6$. Phương trình parabol $(P) : y^2 = 2px = 16x$. Chọn A

Câu 96. Đường chuẩn $(D) : x = -4 = -\dfrac{p}{2} \Leftrightarrow p = 8$. Vậy phương trình parabol $(P) : y^2 = 2px = 16x$. Chọn D

Câu 97. Phương trình chính tắc của $(P) : y^2 = 2px$. (P) đi qua $M\left(\dfrac{3}{2};-2\right)$, nên :

$4 = 3p \Leftrightarrow p = \dfrac{4}{3}$. Vậy $(P) : y^2 = \dfrac{8x}{3}$. Chọn C

Câu 98. Ta có : $2p = 8 \Leftrightarrow p = 4$. Tiêu điểm $F(2;0)$. Phương trình (D) : $y = k(x-2)$. Tung độ giao điểm A, B của (D) và (P):

Với $x = \dfrac{y^2}{8}$, ta được : $y = k\left(\dfrac{y^2}{8} - 2\right) \Leftrightarrow ky^2 - 8y - 16k = 0,\ k \neq 0.$

Ta có : $\Delta' = 16 + 16k^2 > 0$. Vậy $y_A . y_B = -\dfrac{16k}{k} = -16.$ Chọn B

Câu 99. (C) qua $F(3;0)$ và tiếp xúc với (D) tại H, nên MH vuông góc với (D). Ta có : $MF = MH$, nên tập hợp các điểm M là parabol (P) tiêu điểm $F(3;0)$ và đường chuẩn $(D) : x + 3 = 0$.

Tham số tiêu p : $3 = \dfrac{p}{2} \Leftrightarrow p = 6$. Vậy $(P) : y^2 = 12x$.

Cách khác : $MF^2 = MH^2 \Leftrightarrow (3-x)^2 + (-y)^2 = (-3-x)^2$.

Suy ra : $(P) : y^2 = 12x.$ Chọn A

Câu 100. Ta có : $a = m^2$; $b = -4m$; $c = 13m^2 + 4$.

Toạ độ tâm $I \begin{cases} x = a = m^2 \\ y = b = -4m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = x \\ m = -\dfrac{y}{4} \end{cases} \Rightarrow y^2 = 16x$.

(C_m) là đường tròn khi và chỉ khi

$$a^2 + b^2 - c \geq 0 \Leftrightarrow m^4 + 3m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 1.$$

Vậy, tập hợp cần tìm là các phần của parabol $(P) : y^2 = 16x$ tương ứng với $x \geq 1$. Chọn D

Chuyên đề 8.

PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

I. PHÉP DỜI HÌNH

1. Định nghĩa

• Phép dời hình là một phép biến hình không làm thay đổi khoảng cách giữa hai điểm bất kì.

2. Các tính chất

• Phép dời hình biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng có cùng độ dài, biến tam giác thành tam giác bằng nó, biến đường tròn thành đường tròn bằng nó, biến góc thành góc bằng nó.

• Hợp thành của hai phép dời hình f và g.

Nếu f biến điểm M thành điểm M' và g biến M' thành M'' thì phép biến M thành M'' gọi là phép hợp thành của hai phép f và g.

Hợp thành của các phép dời hình là một phép dời hình.

3. Hình H gọi là bằng hình H' nếu có phép dời hình biến hình H thành hình H'.

II. PHÉP ĐỐI XỨNG TRỤC

1. Định nghĩa

• Phép đối xứng qua đường thẳng d, kí hiệu là $Đ_d$ là phép biến hình biến mỗi điểm M thành điểm M' sao cho đường thẳng d là trung trực của đoạn MM'.

• Đường thẳng d gọi là trục đối xứng.

• Gọi M_0 là hình chiếu vuông góc của M trên d thì

$$Đ_d(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M}.$$

• Đường thẳng d gọi là trục đối xứng của hình (H) nếu $Đ_d$ biến (H) thành chính nó. Khi đó (H) gọi là hình có trục đối xứng.

2. Biểu thức tọa độ của phép đối xứng trục

Trong mặt phẳng Oxy, gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ là của M qua $Đ_d$

• Nếu d là trục Ox thì $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y. \end{cases}$ (1)

• Nếu d là trục Oy thì $\begin{cases} x' = -x \\ y' = y. \end{cases}$ (2)

3. Tính chất

Phép đối xứng trục có các tính chất của phép dời hình.

III. PHÉP TỊNH TIẾN

1. Định nghĩa

• Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{V}$, kí hiệu $T_{\vec{V}}$, là phép dời hình biến điểm M thành điểm M' sao cho : Với $\overrightarrow{MM'} = \vec{V}$, ta có :

$$T_{\vec{V}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V} \quad (3)$$

2. Biểu thức tọa độ

Cho $T_{\vec{V}}$ với $\vec{V} = (a;b)$, và $M(x;y)$. Nếu $M'(x';y') = T_{\vec{V}}(M)$ thì :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases} \quad (4)$$

3. Tính chất

• Phép tịnh tiến có các tính chất của một phép dời hình; ngoài ra phép tịnh tiến biến một đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.

IV. PHÉP QUAY VÀ PHÉP ĐỐI XỨNG TÂM

1. Định nghĩa

• Cho điểm cố định O và góc lượng giác α không đổi. Phép quay tâm O với góc quay α; kí hiệu $Q(0;\alpha)$ là một phép dời hình, biến điểm M thành điểm M' sao cho $OM' = OM$ và $(OM, OM') = \alpha$. Vậy :

$$Q(O,\alpha)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} OM' = OM \\ (OM, OM') = \alpha \end{cases} \quad (5)$$

2. Phép đối xứng tâm

• **Định nghĩa**

Cho điểm cố định O. Phép đối xứng qua điểm O, kí hiệu $Đ_O$, là phép dời hình biến điểm M thành M' sao cho $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0}$. Vậy :

$$Đ_O(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'} = \vec{0} \quad (6)$$

Điểm O gọi là tâm đối xứng.

• **Biểu thức tọa độ**

Cho điểm $I(a;b)$. Nếu $Đ_I$ biến $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ thì :

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases} \quad (7)$$

• Tâm đối xứng của hình (H):

+ Điểm O gọi là tâm đối xứng của hình (H) nếu $Đ_O(H) = H$.

V. HÌNH BẰNG NHAU

1. Định nghĩa

Hai hình gọi là bằng nhau nếu có một phép dời hình biến hình này thành hình kia.

VI. PHÉP VỊ TỰ

1. Định nghĩa

Cho điểm cố định O và số $k \neq 0$ không đổi. Phép vị tự tâm O, tỉ số k, kí hiệu $V(O,k)$, là phép biến hình biến mỗi điểm M thành M' sao cho : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$. Vậy :

$$V(O;k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \quad (8)$$

2. Tính chất

Nếu $V(O;R)(M) = M'$ và $V(O;k)(N) = N'$ thì :

$$\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN} \text{ và } M'N' = |k|\,MN \quad (9)$$

• Phép vị tự tỉ số k có các tính chất :

- Biến ba điểm thẳng hàng thành 3 điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự của ba điểm đó.
- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với đường thẳng đó.
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng mà độ dài được nhân lên với $|k|$.
- Biến tam giác thành tam giác đồng dạng với tỉ số đồng dạng là $|k|$, biến góc thành góc bằng nó.
- Biến một đường tròn thành đường tròn.

3. Tâm vị tự của hai đường tròn

Cho hai đường tròn $(I;R)$ và $(I';R')$ với $I \neq I'$ và $R \neq R'$. Ta có hai phép vị tự biến $(I;R)$ thành $(I';R')$ như sau :

$V_1\left(O_1, k_1 = \dfrac{R'}{R}\right)$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$ và

$V_2\left(O_2, k_2 = -\dfrac{R'}{R}\right)$ biến $(I;R)$ thành $(I';R')$.

- Nếu $k_1 > 0$ thì O_1 gọi là tâm vị tự ngoài.
- Nếu $k_2 < 0$ thì O_2 gọi là tâm vị tự trong.

VII. Phép đồng dạng

1. Định nghĩa

Cho số $k > 0$. Phép đồng dạng tỉ số k là phép biến hình biến hai điểm M và N bất kì thành hai điểm M' và N' sao cho $M'N' = kMN$.

2. Tính chất

- Mọi phép đồng dạng tỉ số k đều là hợp thành của một phép vị tự V tỉ số k và một phép dời hình D.
- Phép đồng dạng biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và bảo toàn thứ tự ba điểm đó; biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng, biến một góc thành góc bằng nó.

3. Hai hình đồng dạng

Hai hình gọi là đồng dạng với nhau nếu có phép đồng dạng biến hình này thành hình kia.

B. CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng 1. XÁC ĐỊNH ẢNH CỦA MỘT ĐIỂM, MỘT HÌNH QUA MỘT PHÉP BIẾN HÌNH HOẶC DỜI HÌNH

Phương pháp

- Sử dụng định nghĩa hoặc tính chất hoặc biểu thức tọa độ của phép biến hình hoặc dời hình theo yêu cầu.

Ví dụ 1. a) Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Tìm ảnh của tam giác qua phép vị tư $V\left(G; -\dfrac{1}{2}\right)$.

b) Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD và DA, và I là giao điểm

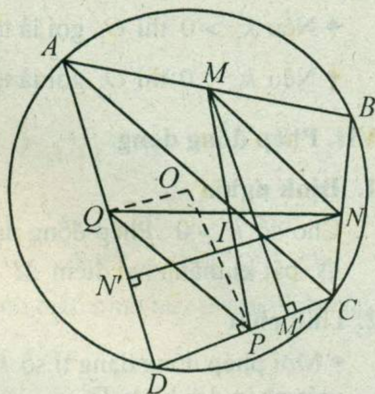
của MP và NQ. Tìm ảnh của các đường thẳng MM', NN' qua phép đối xứng $Đ_I$ với $MM' \perp CD$ và $NN' \perp DA$.

Giải

a) Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AC và AB. Theo tính chất trọng tâm G là ta có :

$\overrightarrow{GM} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GA}$; $\overrightarrow{GN} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GB}$ và

$\overrightarrow{GP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{GC}$.



Vậy, phép vị tự $V\left(G; -\dfrac{1}{2}\right)$ biến tam giác ABC thành tam giác MNP.

b) Từ giả thiết $MN = PQ\left(= \dfrac{AC}{2}\right)$ và $MN \,//\, PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Vậy, I là trung điểm của MP và NQ, do đó : $Đ_1(M) = P$.

Ngoài ra $MM' \,//\, OP$ (cùng $\perp CD$).

Vậy, ảnh của đường thẳng MM' qua phép đối xứng $Đ_1$ là đường thẳng PO. Hoàn toàn tương tự ảnh của đường thẳng NN' qua $Đ_1$ là đường thẳng QO.

Ví dụ 2. a) Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Viết phương trình đường tròn (C') là ảnh của (C) qua phép đối xứng $Đ_I$ với $I(1;2)$.

b) Viết phương trình ảnh của elip $(E): x^2 + 4y^2 = 2$ qua phép vị tự tâm O (gốc tọa độ) tỉ số $k = -2$.

Giải

a) Biểu thức tọa độ của phép đối xứng $Đ_I$ là $\begin{cases} x' = 2 - x \\ y' = 4 - y \end{cases}$ với $M(x;y) \in (C)$ và $M'(x';y') \in (C')$. Do đó : $\begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 4 - y'. \end{cases}$ Thay vào phương trình (C) ta được : $(2 - x')^2 + (4 - y')^2 - 4(2 - x') + 2(4 - y') - 4 = 0$

$$\Leftrightarrow x'^2 + y'^2 - 10y' + 16 = 0.$$

Vậy, phương trình đường tròn (C') ảnh của (C) qua phép $Đ_I$ là :

$$x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Cách khác :

Dễ thấy đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $r = 3$. Ảnh J' của J qua phép đối xứng $Đ_I$ là :

$$\begin{cases} x' = 2 - 2 = 0 \\ y' = 4 + 1 = 5 \end{cases} \Rightarrow J'(0;5).$$

Đường tròn (C') có tâm $J'(0;5)$ và có bán kính $r' = r = 3$ là :

$$(x-0)^2 + (y-5)^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 10y + 16 = 0.$$

b) Gọi $M(x;y)$ và $M'(x';y')$ với $M \in (E)$ và $M' \in (E')$, ta có :

$$V(O;k)(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = kx \\ y' = ky. \end{cases}$$

Với $k = -2 \Rightarrow \begin{cases} x' = -2x \\ y' = -2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}x' \\ y = -\dfrac{1}{2}y'. \end{cases}$

Thay vào phương trình $(E): x^2 + 4y^2 = 1$, ta được :

$$\left(-\frac{1}{2}x'\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}y'\right)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Vậy, phương trình elip (E') ảnh của (E) qua phép vị tự $V(O;-2)$ là :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

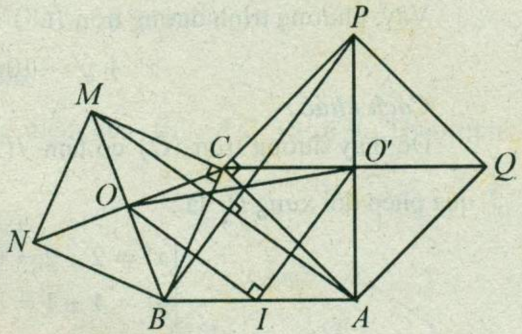
Dạng 2. CHỨNG MINH TÍNH CHẤT CỦA MỘT HÌNH BẰNG PHÉP BIẾN HÌNH, DỜI HÌNH

Phương pháp

• Sử dụng định nghĩa và tính chất của phép biến hình, dời hình đã học để chứng minh bài toán theo yêu cầu.

Ví dụ 1. Về phía ngoài của tam giác ABC vẽ các hình vuông $BCMN$ và $ACPQ$ có tâm O và O'. Gọi I là trung điểm AB. Chứng minh IOO' là tam giác vuông cân.

Giải



Phép quay tâm C góc quay 90^0 biến A thành P và biến M thành B tức AM thành BP.

Do đó :

$AM = BP$ và $AM \perp BP$.

Mặt khác, OI là đường trung bình của tam giác ABM nên :

$OI \,//\, AM$ và $OI = \frac{1}{2}AM$.

Tương tự :

$$O'I \,//\, BP \text{ và } O'I = \frac{1}{2}BP.$$

Suy ra $\quad OI = O'I$ và $OI \perp O'I$.

Vậy, tam giác IOO' là tam giác vuông cân.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng nếu hai tam giác có các đường cao tương ứng bằng nhau thì bằng nhau.

Giải

Giả sử tam giác ABC có các đường cao AH, BI, CK và tam giác $A'B'C'$ có các đường cao $A'H'$, $B'I'$ và $C'K$ thỏa mãn :

$$AH = A'H',\ BI = B'I',\ CK = C'K'. \qquad (1)$$

Với tam giác ABC, ta có :

$$BC.AH = AC.BI = AB.CK \,(= 2S) \qquad (2)$$

Tương tự với tam giác $A'B'C'$, ta cũng có :

$$B'C'.A'H' = C'A'.B'I' = A'B'.C'K' \,(= 2S') \qquad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) ta được :

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{AB}{A'B'} = k.$$

Do đó, hai tam giác ABC và $A'B'C'$ đồng dạng, qua phép đồng dạng tỉ số k ; phép đồng dạng này biến các đường cao AH thành $A'H'$ với $\frac{AH}{A'H'} = k$.

Vì $AH = A'H'$ (giả thiết), suy ra $k = 1$. (4)

Do đó, (4) cho ta hai tam giác ABC và $A'B'C'$ có các cặp cạnh tương ứng bằng nhau nên bằng nhau.

Dạng 3. TÌM TẬP HỢP ĐIỂM

Phương pháp

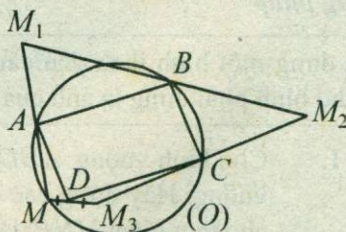
- Sử dụng tính chất: Nếu có phép biến hình f mà $M' = f(M)$; khi M di động trên hình (H) thì M' di động trên hình (H') là ảnh của (H) qua phép biến hình f.
- Cần xác định được phép biến hình f để kết luận hình (H).

Ví dụ 1. a) Cho đường tròn (O) và ba điểm A, B, C cố định trên đường tròn (O) ; M là điểm thay đổi trên (O). Gọi M_1 là điểm đối xứng của M qua $A, M_2 = Đ_B(M_1).M_3 = Đ_C(M_2)$. Tìm tập hợp điểm M_3.

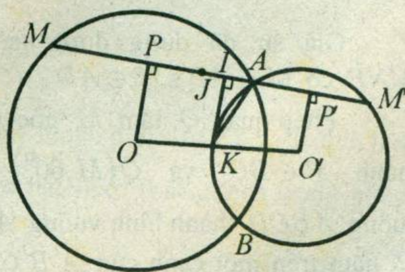
b) Hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Một đường thẳng quay quanh A cắt (O) tại M và cắt (O') tại M'. Gọi P và P' lần lượt là trung điểm của AM và AM'. Tìm quỹ tích trung điểm I của PP' và trung điểm J của MM'.

Giải

a) Gọi D là trung điểm MM_3. Dễ dàng nhận thấy $ABCD$ là hình bình hành. Do đó, D cố định. Suy ra $Đ_D(M) = M_3$. Vậy, tập hợp điểm M_3 là đường tròn ảnh của (O) qua phép đối xứng tâm $Đ$.



b) Dễ thấy $OPP'O'$ là hình thang vuông tại P. Gọi K là trung điểm OO' ta được $KI \,//\, OP \Rightarrow KI \perp IA$. Suy ra tập hợp điểm I là đường tròn đường kính AK. Do tính chất trung điểm :



$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AM'})$$
$$= \frac{1}{2}(2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{AP'})$$
$$= \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}' = 2\overrightarrow{AI}.$$

Suy ra phép vị tự $V(A; k = 2)\ (I) = J$.

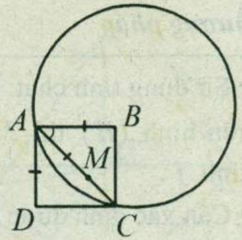
Vậy, tập hợp điểm J là ảnh của đường tròn tập hợp của điểm I qua phép vị tự $V(A;2)$.

Ví dụ 2. Cho điểm A cố định nằm trên đường tròn (O) và điểm C chạy trên đường tròn đó. Vẽ hình vuông $ABCD$. Tìm tập hợp điểm B và D.

Giải

Trên đoạn AC lấy điểm M sao cho :

$$AM = AB = AD = \frac{\sqrt{2}}{2}AC$$



Do đó, phép vị tự $V\left(A;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(C) = M$.

Ngoài ra $(AM, AB) = 45^0$ và $(AM, AD) = -45^0$.

Do đó, phép quay $Q(45^0)$ biến điểm M thành điểm B và $Q(-45^0)(M) = D$.

Suy ra, phép hợp thành F của phép vị tự V và phép quay Q là phép đồng dạng biến C thành B hoặc D.

Vậy, tập hợp các điểm B và D là ảnh của đường tròn (O) qua phép đồng dạng góc 45^0 hoặc -45^0.

Dạng 4. DỰNG HÌNH BẰNG PHÉP BIẾN HÌNH

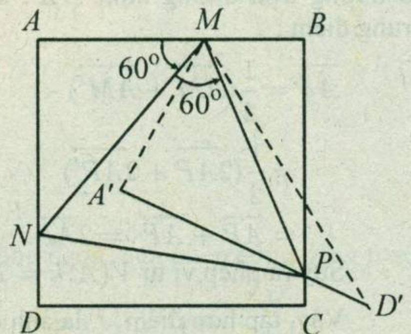
Phương pháp

- Để dựng một hình theo yêu cầu của bài toán ta xác định một phép biến hình sao cho hình phải dựng là ảnh của một hình đã biết.

Ví dụ 1. Cho hình vuông $ABCD$ và một điểm M nằm trên một cạnh của hình vuông. Hãy dựng các điểm N và P nằm trên cạnh của hình vuông sao cho tam giác MNP là tam giác đều.

Giải

Giả sử đã dựng được tam giác đều MNP có $M \in AB$, $N \in AD$.

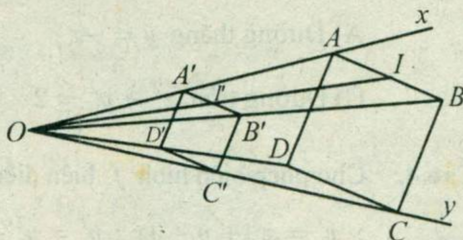


Phép quay Q tâm M góc 60^0 biến N thành $P \in BC$ và $Q(M, 60^0)$ biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $A'B'C'D'$ và P nằm trên một cạnh của $A'B'C'D'$. Do đó, P là giao điểm của BC và cạnh $A'D'$ của hình vuông $A'B'C'D'$.

Suy ra cách dựng : Dựng ảnh A', D' của A và D qua phép quay $Q(M;60^0)$. $A'D'$ cắt BC tại P. Dựng tam giác đều MNP có $N \in AD$ và $P \in BC$, là tam giác phải dựng.

Bài toán luôn có một nghiệm hình.

Ví dụ 2. Cho góc nhọn xOy và một điểm I nằm trong góc đó. Dựng một hình vuông có một cạnh đi qua I và có hai đỉnh đối diện nằm trên hai cạnh của góc.



Giải

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ theo yêu cầu của bài toán. Phép vị tự tâm O tỉ số $k \neq 1$ biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $A'B'C'D'$ có hai đỉnh A', C' nằm trên Ox và Oy.

+ Cách dựng : Dựng hình vuông $A'B'C'D'$ có hai đỉnh A', C' nằm trên Ox, Oy. Tia OI cắt một cạnh nào đó của hình vuông $A'B'C'D'$ tại I', giả sử $I' \in A'B'$. Phép vị tự $V(O;k)$ biến hình vuông $A'B'C'D'$ thành hình vuông $ABCD$ phải dựng theo yêu cầu bài toán.

+ Biện luận : Nếu tia OI không trùng với tia phân giác của góc xOy thì bài toán có hai nghiệm hình. Nếu I thuộc tia phân giác đó thì bài toán có một nghiệm hình.

C. CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Xét các mệnh đề sau :

I. Phép đồng nhất là một phép dời hình ;

II. Sự hợp thành của nhiều phép dời hình là một phép dời hình ;

III. Phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(y;x)$ là một phép dời hình.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I và II B) Chỉ I và III

C) Chỉ II và III D) Cả I, II và III

Câu 2. Cho phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi : $x' = 3x - 4$; $y' = 2y - 2$. Tìm điểm bất biến (bất động) trong phép biến hình trên.

A) $\left(\frac{4}{3};1\right)$. B) $(2;2)$. C) $(-2;-2)$. D) $\left(1;\frac{4}{3}\right)$.

Câu 3. Cho phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi : $x' = 2x + y$; $y' = 2y + x$. Tìm tập hợp các điểm bất biến trong phép biến hình f.

A) Đường thẳng $y = -x$.
B) Đường thẳng $y = x$.
C) Đường tròn $x^2 + y^2 = 2$.
D) Elip $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$.

Câu 4. Cho phép biến hình f biến điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi : $x' = x^2 + y - 3x$; $y' = y^2 + 2y - 4$. Tìm tập hợp các điểm bất biến trong phép biến hình f.

A) Parabol $y = -x^2 + 4x$.
B) Đường tròn $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$.
C) Đường tròn $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$.
D) Parabol $y^2 = 4x$.

Câu 5. Nếu phép biến hình f biến mỗi điểm $M(x;y)$ thành điểm $M'(x';y')$ định bởi : $x' = x + 3$; $y' = y - 2$ thì f là :

A) phép vị tự.
B) phép đồng nhất.
C) phép đồng dạng.
D) phép dời hình.

- Cho đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. Dùng giả thiết này cho các câu 6 và 7.

Câu 6. Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng trục Ox.

A) $(C'): x'^2 + y'^2 - 2x' + 4y' - 11 = 0$.
B) $(C'): x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' - 11 = 0$.
C) $(C'): x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' - 11 = 0$.
D) $(C'): x'^2 + y'^2 + 2x' - 4y' - 11 = 0$.

Câu 7. Tìm ảnh của (C) qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$

A) $(C'): x'^2 + y'^2 - 2x' - 4y' - 11 = 0$.
B) $(C'): x'^2 + y'^2 - 2x' + 4y' - 11 = 0$.
C) $(C'): x'^2 + y'^2 + 2x' - 4y' - 11 = 0$.
D) $(C'): x'^2 + y'^2 + 2x' + 4y' - 11 = 0$.

- Cho parabol $(P): y^2 = 4x$. Dùng giả thiết này cho các câu 8 và 9.

Câu 8. Tìm ảnh của (P) qua phép đối xứng trục Oy.

A) $(P'): y'^2 = -4x'$.
B) $(P'): y'^2 = 4x'$.
C) $(P'): y'^2 = -\frac{x'}{4}$.
D) $(P'): y'^2 = \frac{x'}{4}$.

Câu 9. Tìm ảnh của (P) qua phép đối xứng trục $(D): x - y = 0$.

A) $(P): y' = -\frac{x'^2}{4}$.
B) $(P): y'^2 = \frac{x'}{4}$.
C) $(P): y'^2 = -\frac{x}{4}$.
D) $(P): y' = \frac{x'^2}{4}$.

• Cho đường thẳng $(D): x + y - 4 = 0$. Dùng giả thiết này cho các câu 10 và 11.

Câu 10. Ảnh của (D) qua phép đối xứng trục $(d): x - y = 0$ là :

A) $(D'): x' - y' - 4 = 0$.
B) $(D): x' + y' - 4 = 0$.
C) $(D): x' + y' + 4 = 0$.
D) $(D): x' - y' + 4 = 0$.

Câu 11. Ảnh của (D) qua phép đối xứng trục $(\Delta): x + y = 0$ là :

A) $(D'): x' + y' + 4 = 0$.
B) $(D'): x' - y' + 4 = 0$.
C) $(D'): x' - y' - 4 = 0$.
D) $(D'): x' + y' - 4 = 0$.

Câu 12. Xét mệnh đề nào sau đây đúng ? Một tam giác đều có :

I. Một tâm đối xứng ;
II. Một trục đối xứng ;
III. Hai trục đối xứng ;
IV. Ba trục đối xứng.

A) Chỉ I.
B) I và II.
C) I và III.
D) Chỉ IV.

Câu 13. Xét mệnh đề nào sau đây đúng ? Một hình vuông có :

I. Hai trục đối xứng
II. Bốn trục đối xứng
III. Một tâm đối xứng

A) Chỉ I.
B) Chỉ IV.
C) II và III.
D) I và IV.

Câu 14. Gọi (D') là ảnh của đường thẳng (D) trong phép tịnh tiến vectơ $\vec{V} \neq \vec{0}$, (d) là giá của $\vec{V}$. Xét các mệnh đề sau :

I. (D') song song với $(D) \Leftrightarrow (d)$ song song với (D);
II. (D') song song với $(D) \Leftrightarrow (d)$ cắt (D);
III. (D') trùng với $(D) \Leftrightarrow (d)$ cùng phương với (D).

Mệnh đề nào đúng.

A) Chỉ I.
B) II và III.
C) I và III.
D) Chỉ III.

Câu 15. Cho hai đường thẳng (D) và (D') song song. Có bao nhiêu phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến (D) thành (D') ?

A) 1.
B) 2.
C) 3.
D) Vô số.

Câu 16. Tìm ảnh của đường thẳng $(D): 2x - 3y + 6 = 0$ qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} = (3;2)$.

A) $(D'): 2x - 3y + 6 = 0$. B) $(D'): 2x + 3y + 6 = 0$.

C) $(D'): 3x - 2y + 6 = 0$. D) $(D'): 3x - 2y - 6 = 0$.

Câu 17. Cho hai đường thẳng (D) và (D') cắt nhau tại I và hợp với nhau một góc α. Xét các mệnh đề sau :

I. (D') là ảnh của (D) trong một phép quay ;

II. (D') là ảnh của (D) trong một phép đối xứng trục ;

III. (D') là ảnh của (D) trong một phép đối xứng tâm.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) I và II. C) Chỉ III. D) I và III.

Câu 18. Cho phép biến hình f biến đường thẳng (D) thành đường thẳng (D') song song với (D). Xét các mệnh đề sau :

I. f là phép tịnh tiến ; II. f là phép đối xứng tâm ;

III. f là phép đối xứng trục ; IV. f là phép quay.

Mệnh đề nào đúng ?

A) I và II. B) II và III

C) I, II và III. D) Cả I, II, III và IV.

Câu 19. Tìm ảnh (C') của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$ qua phép đối xứng tâm $I(1;-2)$.

A) $(C'): x'^2 + y'^2 - 2y' - 8 = 0$.

B) $(C'): x'^2 + y'^2 - 14y' - 8 = 0$.

C) $(C'): x'^2 + y'^2 + 2y' - 8 = 0$.

D) $(C'): x'^2 + y'^2 - 14y' + 8 = 0$.

Câu 20. Nếu đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 9 = 0$ thì trục đối xứng của (C) có phương trình là :

A) $(D): kx - y + k + 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

B) $(D): kx + y + k + 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$.

C) $(D): x = -1$ hay $(D): y = 2$.

D) $(D): x = 1$ hay $(D): y = -2$.

Câu 21. Cho hai đường thẳng $(D): 3x - 4y + 5 = 0$; $(D'): 3x - 4y - 1 = 0$.

Tập hợp các tâm đối xứng I biến (D) thành (D') là :

A) $(d): x = -3$. B) $(d): x = 3$.

C) $(d): 3x - 4y + 4 = 0$. D) $(d): 3x - 4y + 2 = 0$.

• Cho tam giác ABC. Gọi $T_{\overrightarrow{AC}}$, $T_{\overrightarrow{CB}}$, $T_{\overrightarrow{BA}}$ lần lượt là ba phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}$ và $\overrightarrow{BA}$. Dùng giả thiết này cho các câu 22 và 23.

Câu 22. Hợp thành của hai phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{BA}}$ và $T_{\overrightarrow{AC}}$ là :

A) Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{CB}$: $T_{\overrightarrow{CB}}$.

B) Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{BC}$: $T_{\overrightarrow{BC}}$.

C) Phép tịnh tiến vectơ $\dfrac{\overrightarrow{CB}}{2}$: $T_{\frac{\overrightarrow{CB}}{2}}$.

D) Phép tịnh tiến vectơ $2\overrightarrow{BC}$: $T_{2\overrightarrow{BC}}$.

Câu 23. Hợp thành của ba phép tịnh tiến $T_{\overrightarrow{AC}}, T_{\overrightarrow{CB}}$ và $T_{\overrightarrow{BA}}$ là :

A) Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AB}$: $T_{\overrightarrow{AB}}$.

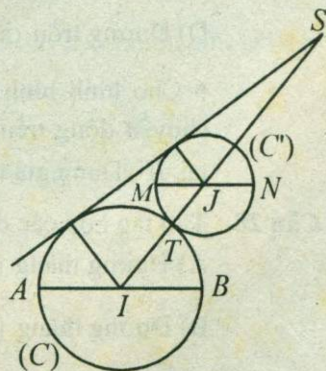
B) Phép vị tự tâm A, tỉ số $\dfrac{AC}{AB}$: $V\left(A; \dfrac{AC}{AB}\right)$.

C) Phép đồng nhất e.

D) Phép quay tâm A, góc 180^0 : $\varphi(A; 180^0)$.

• Cho đường tròn (C) tâm I có đường kính $AB = 4$ cố định. Đường tròn (C') tâm J di động bán kính bằng 1 tiếp xúc ngoài với (C) tại T, có đường kính MN song song và cùng chiều với AB. Tiếp tuyến chung ngoài của (C) và (C') cắt IJ tại S.

Dùng giả thiết này cho các câu 24 và 25.



Câu 24. Tìm tập hợp các điểm M.

A) Đường tròn (C_8) tâm A bán kính bằng 3.

B) Đường tròn (C_6) tâm I bán kính bằng 3.

C) Đường tròn (C_4) tâm B bán kính bằng 2.

D) Đường tròn (C_2) tâm E bán kính bằng 3 với $\overrightarrow{IE} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{2}$.

Câu 25. Tìm tập hợp các điểm S.

A) Đường tròn (C_3) tâm I bán kính bằng 6.

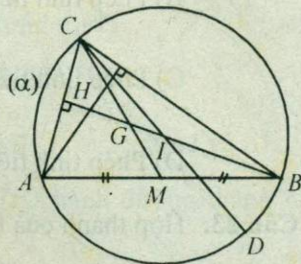
B) Đường tròn (C_5) tâm A bán kính bằng 8.

C) Đường tròn (C_7) tâm B bán kính bằng 7.

D) Đường tròn $\left(C_9\right)$ tâm I bán kính bằng 12.

• Cho A và B là hai điểm cố định trên đường tròn (α) cố định tâm I; CD là đường kính di động của (α); M là trung điểm của $AB = 2R$; H là trực tâm và G là trọng tâm của tam giác ABC. Dùng giả thiết này cho các câu 26 và 27.

Câu 26. Tập hợp các điểm G là :



A) Đoạn thẳng song song với AB và cách AB một đoạn bằng $\dfrac{R}{3}$ ở trong (α).

B) Đường tròn (a) tâm M bán kính bằng $\dfrac{R}{3}$.

C) Đường tròn (β), tâm J với $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MI}$, bán kính bằng $\dfrac{R}{3}$.

D) Đường tròn (b), tâm I bán kính bằng $\dfrac{R}{6}$.

Câu 27. Tìm tập hợp các điểm H.

A) Đường tròn (a) tâm M bán kính bằng $\dfrac{AB}{2}$.

B) Đường tròn (γ) tâm K với $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{MI}$, bán kính bằng R.

C) Đường tròn (b) tâm I bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$

D) Đường tròn (ω) tâm A bán kính bằng $\dfrac{R}{3}$.

• Cho hình bình hành $ABCD$ có đỉnh A cố định; hai đỉnh B và D chuyển động trên đường thẳng cố định (d). Vẽ AH vuông góc với (d) tại H. Dùng giả thiết này cho các câu 28, 29.

Câu 28. Tìm tập hợp các đỉnh C.

A) Đường thẳng $\left(D_1\right)$ song song và cách (d) một đoạn bằng AH.

B) Đường thẳng $\left(D_2\right)$ song song và cách (d) một đoạn bằng $\dfrac{AH}{2}$.

C) Đường tròn (α) tâm A bán kính bằng $3AH$.

D) Một tập hợp khác.

Câu 29. Tìm tập hợp các trọng tâm G của tam giác BCD.

A) Đường thẳng (m) song song và cách (d) một đoạn bằng $\dfrac{2AH}{3}$.

B) Đường thẳng (n) song song và cách (d) một đoạn bằng $2AH$.

C) Đường tròn (b) tâm H bán kính bằng AH.

D) Đường thẳng (a) song song với (d) và cách A một đoạn bằng $\frac{4AH}{3}$.

Câu 30. Các đường cong nào sau đây có cùng tâm đối xứng ?

I. $(C): x^2 + y^2 - a^2 = 0$.

II. $(E): \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > b > 0$.

III. $(H): \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,\ a > 0,\ b > 0$.

A) I và II.
B) II và III.
C) I và III.
D) Cả I, II và III.

Câu 31. Các đường cong nào sau đây có tâm đối xứng ?

I. $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d,\ a \neq 0$;

II. $(H): y = \frac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'},\ b' \neq 0$;

III. $(\alpha): y = \cos x$.

A) Chỉ I.
B) I và II
C) Chỉ III.
D) Cả I, II và III.

Câu 32. Các hình nào sau đây có tâm đối xứng ?

I. Hình đa giác đều ;
II. Hình bình hành ;
III. Hình tròn.

A) I và II
B) I và III.
C) II và III
D) Cả I, II, III.

Câu 33. Trong bảng chữ cái (in hoa), A, B, C ..., Y, Z có bao nhiêu chữ cái có tâm đối xứng ?

A) 4.
B) 5.
C) 6.
D) 7.

Câu 34. Đồ thị của hàm số nào sau đây có cùng tâm đối xứng ?

I. $y = \frac{4}{x},\ x \neq 0$.
II. $y = \tan x,\ x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

III. $y = 2x^3$.
IV. $y = \sin x,\ x \in (-\pi; \pi)$.

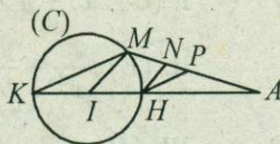
A) I và II.
B) II và III.
C) III và IV.
D) Cả I, II, III và IV.

Câu 35. Hợp thành của hai phép đối xứng tâm là :

A) phép tịnh tiến.
B) phép vị tự.
C) phép quay.
D) phép đối xứng trục.

• Cho điểm M chuyển động trên đường tròn cố định (C) tâm I, bán kính R ; A là điểm cố định ở ngoài (C) với $AI = 3R$; AI cắt (C) tại H và K với H ở trên đoạn AI. Dùng giả thiết này cho các câu 36, 37.

Câu 36. Từ H vẽ đường thẳng song song với IM cắt AM tại N. Tìm tập hợp các điểm N.



A) Đường tròn (n) tâm I bán kính bằng $\frac{2R}{3}$.

B) Đường tròn (m) tâm K bán kính bằng $\frac{4R}{3}$.

C) Đường tròn (a) tâm H bán kính bằng $\frac{2R}{3}$.

D) Một đường cong khác.

Câu 37. Từ H vẽ đường thẳng song song với KM cắt AM tại P. Tìm tập hợp các điểm P.

A) Đường tròn (b) tâm J bán kính $\frac{R}{2}$ với $\frac{\overrightarrow{AJ}}{\overrightarrow{AI}} = \frac{1}{2}$.

B) Đường tròn (α) tâm H bán kính $\frac{3R}{2}$.

C) Đường tròn (β) tâm I bán kính $2R$.

D) Đường tròn (γ) tâm k bán kính $3R$.

• Cho hình bình hành $ABCD$ tâm I có đường chéo AC cố định; đỉnh B di động trên đường tròn (C) tâm A bán kính R. Vẽ hình bình hành $ACMD$. Dùng giả thiết này cho các câu 38, 39.

Câu 38. Tìm tập hợp các đỉnh D.

A) Đường tròn (a) tâm A bán kính $2R$.

B) Đường tròn (α) tâm C bán kính R.

C) Đường tròn (b) tâm I bán kính $\frac{3R}{2}$.

D) Một đường khác.

Câu 39. Tìm tập hợp các điểm M.

A) Đường tròn (m) tâm C bán kính $2R$.

B) Đường tròn (n) tâm A bán kính $3R$.

C) Đường tròn (p) tâm I bán kính $\frac{4R}{3}$.

D) Đường tròn (β) tâm E bán kính R với $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$.

Câu 40. Hai đường tròn (C_1) và (C_2) bằng nhau có tâm I và J khác nhau có thể là ảnh của nhau qua

I. một phép đối xứng tâm. II. một phép đối xứng trục.
III. một phép tịnh tiến. IV. cả ba phép trên.

• Cho đường tròn (C) tâm I có đường kính $AB = 2R$ cố định. Gọi M là điểm di động trên (C). Vẽ hai hình bình hành $AIME$ và $ABFM$. Dùng giả thiết này cho các câu 41, 42.

Câu 41. Tập hợp các đỉnh E là

A) đường tròn (α) tâm A bán kính R.

B) đường tròn (a) tâm I bán kính $2R\sqrt{3}$.

C) đường tròn (b) tâm B bán kính $3R$.

D) một đường khác.

Câu 42. Tìm tập hợp các đỉnh F.

A) Đường tròn (m) tâm I bán kính $2R\sqrt{3}$.

B) Đường tròn (n) tâm A bán kính $3R$.

C) Đường tròn (β) tâm B bán kính R.

D) Hai đường thẳng (D_1) và (D_2) song song và cách đều đường thẳng AB một đoạn bằng R.

Câu 43. Cho hai điểm A và B nằm cùng một phía đối với đường thẳng (D). Gọi C là điểm đối xứng của A qua trục (D); H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A và B trên D. Xác định điểm M trên (D) để $MA + MB$ ngắn nhất.

A) M trùng với H.

B) M trùng với K.

C) M trùng với trung điểm E của đoạn HK.

D) M trùng với giao điểm của (D) và BC.

Câu 44. Cho tam giác ABC vuông tại A có đường cao $AH = 2HB$ và $AH = \frac{1}{2}HC$. Phép đồng dạng biến tam giác vuông HCA thành tam giác vuông HAB là

A) hợp thành của phép vị tự tâm H tỉ số 2 và phép quay tâm H góc quay 90^0.

B) hợp thành của phép vị tự tâm H tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép quay tâm H góc 90^0.

C) Hợp thành của phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{HA}$ và phép quay tâm H góc 180^0.

D) Hợp thành của phép quay tâm H góc 90^0 và phép vị tự tâm H tỉ số 2.

Câu 45. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$ có cạnh lần lượt a và $\frac{a}{2}$; ba đỉnh B, A, B' và ba đỉnh D, A, D' theo thứ tự thẳng hàng. Phép đồng dạng biến hình vuông $ABCD$ thành hình vuông $AB'C'D'$ là :

I. hợp thành của phép quay tâm A góc 180^0 và phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$.

II. hợp thành của phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ và phép đối xứng tâm A.

III. hợp thành của phép vị tự tâm A tỉ số 2 và phép quay tâm A góc 180^0.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II. C) I và II. D) II và III.

Câu 46. Cho tam giác ABC có $AB > AC$. Gọi M là một điểm trên đường phân giác trong của góc A. Xét các mệnh đề sau :

I. $MB - MC < AB - AC$; II. $MB - MC > AB - AC$;

III. $MB - MC = AB - AC$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Cả ba mệnh đề đều sai.

Câu 47. Cho tam giác ABC. Gọi N là một điểm trên đường phân giác ngoài của góc A. Xét các mệnh đề sau :

I. $NB + NC = AB + AC$; II. $NB + NC < AB + AC$;

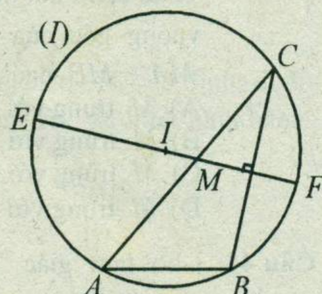
III. $NB + NC > AB + AC$.

Mệnh đề nào đúng ?

A) Chỉ I. B) Chỉ II.

C) Chỉ III. D) Cả ba mệnh đề đều sai.

Câu 48. Cho đường tròn (I) tâm I bán kính R; AB là dây cung cố định ; C là điểm đối xứng của B qua đường kính di động EF; AC cắt EF tại M. Tập hợp các điểm M là



A) đường tròn tâm A bán kính R.

B) cung tròn chứa góc $\widehat{AIB}$ đi qua A và B.

C) đường tròn tâm B bán kính $\frac{3R}{4}$.

D) cung tròn chứa góc $\widehat{IAB}$ đi qua I và B.

Câu 49. Cho tam giác đều ABC; ba đường cao AM, BN và CP đồng quy tại H. Xác định phép biến hình biến $\overrightarrow{AP}$ thành $\overrightarrow{BM}$.

A) Phép vị tự tâm A, tỉ số $\frac{1}{2}$.

B) Phép quay tâm H, góc quay 60^0.

C) Phép quay tâm C, góc quay 60^0.

D) Phép quay tâm H, góc quay 120^0.

Câu 50. Cho tam giác ABC vuông cân tại A cạnh $AB = a$, đường cao AH. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tìm phép biến hình biến $\overrightarrow{BH}$ thành $\overrightarrow{CD}$.

A) Phép quay góc 135^0, tâm I là giao điểm của trung trực của cạnh BC và cung tròn chứa góc 135^0 đi qua B và C.

B) Phép quay góc 120^0, tâm J là giao điểm của trung trực của cạnh BC và cung tròn chứa góc 120^0 đi qua B và C.

C) Hợp thành của phép vị tự tâm A, tỉ số 2 và phép quay tâm B, góc quay 45^0.

D) Hợp thành của phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AH}$ và phép đối xứng tâm H.

ĐÁP ÁN

1. D	2. B	3. A	4. C	5. D	6. B	7. C	8. A	9. D	10. B
11. A	12. D	13. C	14. B	15. D	16. A	17. B	18. D	19. C	20. A
21. D	22. B	23. C	24. D	25. A	26. C	27. B	28. A	29. D	30. A
31. B	32. C	33. D	34. D	35. A	36. C	37. A	38. B	39. D	40. D
41. A	42. C	43. D	44. B	45. C	46. A	47. C	48. B	49. D	50. A

D. HƯỚNG DẪN GIẢI TRẮC NGHIỆM

Câu 1. I. đúng, vì phép đồng nhất giữ nguyên khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
II. đúng, vì sự hợp thành của nhiều phép dời hình giữ nguyên khoảng cách giữa hai điểm bất kì.
III. đúng, vì là phép đối xứng trục $(D): y = x$. Chọn D

Câu 2. Gọi $I(x;y)$ là điểm bất biến trong phép biến hình f, ta có ảnh $I'(x';y') \equiv I(x;y)$. Khi đó :

$$\begin{cases} x = 3x - 4 \\ y = 2y - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } I(2;2).$$ Chọn B

Câu 3. Ta có : $I'(x';y') \equiv I(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x + y \\ y = 2y + x \end{cases} \Rightarrow y = -x$. Vậy, tập hợp các điểm bất biến là đường thẳng $y = -x$. Chọn A

Câu 4. Ta có : $I'(x';y') \equiv I(x;y) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x^2 + y - 3x \\ y = y^2 + 2y - 4 \end{cases}$.

Suy ra : $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Vậy tập hợp cần tìm là đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. Chọn C

Câu 5. Gọi $\vec{V}(3;-2)$. Giả thiết $\Leftrightarrow \begin{cases} x' - x = 3 \\ y' - y = -2 \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{V}$. Do đó, f là phép tịnh tiến nên là phép dời hình. Chọn D

Câu 6. Gọi $M(x;y)$ là điểm trên (C), $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục Ox. Ta có : $M' \begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = -y' \end{cases}$.

Thay vào phương trình của $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$, ta được $(C'): x'^2 + y'^2 - 2x' + 4y' - 11 = 0$. Chọn B

Câu 7. Gọi $M(x;y)$ là điểm trên (C) ; $N(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $O(0;0)$. Ta có : $N \begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y'. \end{cases}$

Thay vào phương trình của $(C): x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$, ta được $(C'): x'^2 + y'^2 + 2x' - 4y' - 11 = 0$. Chọn C

Câu 8. Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc (P) ; $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục Oy. Ta có : $M' \begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = y'. \end{cases}$ Thay vào phương trình của $(P): y^2 = 4x$, ta được $(P'): y'^2 = -4x'$. Chọn A

Câu 9. Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc (P) ; $N(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục $(D): x - y = 0$. Ta có :

$N \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = y' \end{cases}$. Thay vào phương trình của $(P): y^2 = 4x$, ta được $(P'): y' = \dfrac{x'^2}{4}$. Chọn D

Câu 10. Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc (D) ; $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng trục $(d): x - y = 0$.

Ta có : $M'\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x' \\ x = y'. \end{cases}$

Thay vào phương trình của $(D): x + y - 4 = 0$, ta được : $(D'): x' + y' - 4 = 0 \Rightarrow (D') \equiv (D)$.

Cách khác : Ta có $(D) \perp (d)$, nên hình đối xứng của (D) qua trục (d) chính là (D). Chọn B

Câu 11. Gọi $M(x;y)$ là điểm thuộc (D) ; $N(x';y')$ là ảnh của N qua phép đối xứng trục $(\Delta): x + y = 0$. Ta có : $N\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -x' \\ x = -y' \end{cases}$. Thay vào phương trình của $(D): x + y - 4 = 0$, ta được $(D): x' + y' + 4 = 0$.

Cách khác : Ta có $(D) // (\Delta)$ và (Δ) qua gốc O, nên (D') là ảnh của (D) qua phép đối xứng tâm O. Ta có : $\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -x' \\ y = -y'. \end{cases}$

Vậy $(D'): x' + y' + 4 = 0$. Chọn A

Câu 12. Tam giác đều có ba trục đối xứng là ba đường cao và không có tâm đối xứng. Chọn D

Câu 13. Hình vuông có bốn trục đối xứng là hai đường chéo và hai đường thẳng đi qua trung điểm của hai cặp cạnh đối và có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo. Chọn C

Câu 14. II và III đúng. Chọn B

Câu 15. Có vô số vectơ $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ với M thuộc (D) và N thuộc (D') có giá không cùng phương với (D), nên có vô số phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} \neq \vec{0}$ biến (D) thành (D'). Chọn D

Câu 16. Ta có $\vec{u} = (3;2)$ là một vectơ chỉ phương của (D) nên giá của $\vec{u}$ cùng phương với (D). Vậy ảnh (D') trùng với (D) qua phép tịnh tiến vectơ $\vec{u} = (3;2)$. Chọn A

Câu 17. Phép quay tâm I góc α biến (D) thành (D').

- Phép đối xứng qua trục là một trong hai đường phân giác của góc tạo bởi (D) và (D') biến (D) thành (D'). Chọn B

Câu 18. Phép tịnh tiến vectơ $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ với A thuộc (D) và B thuộc (D'):

- Phép đối xứng qua tâm I là điểm cách đều (D) và (D').
- Phép đối xứng qua trục (d) là đường thẳng song song và cách đều (D) và (D').
- Phép quay tâm O là điểm cách đều (D) và (D') và góc quay bằng 180^0.

Chọn D

Câu 19. Gọi $M(x;y)$ thuộc (C), $M'(x';y')$ là ảnh của M qua phép đối xứng tâm $I(1;-2)$. Ta có : $\begin{cases} x + x' = 2 \\ y + y' = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = -(4 + y') \end{cases}$.

Thay vào phương trình của $(C') : x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$, ta được :

$(C') : x'^2 + y'^2 + 2y' - 8 = 0$. Chọn C

Câu 20. Ta có : $a = -1$; $b = 2$, nên tọa độ tâm I là $I(-1;2)$. Mọi đường thẳng (D) đi qua I là trục đối xứng của (C). Phương trình $(D) : y - 2 = k(x+1) \Leftrightarrow (v) : kx - y + k + 2 = 0,\ k \in \mathbb{R}$. Chọn A

Câu 21. Tâm I của phép đối xứng cách đều (D) và (D'). Nên tập hợp cần tìm là :

$$d(I,D) = -d(I,D') \Leftrightarrow \frac{3x - 4y + 5}{5} = -\frac{(3x - 4y - 1)}{5}$$

$\Leftrightarrow$ Đường thẳng $(d) : 3x - 4y + 2 = 0$.

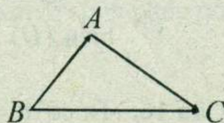
Chú ý : I cách đều (D) và (D'), vì (D) song song với (D'). Nên phương trình tập hợp I là :

$$\frac{(3x - 4y + 5) + (3x - 4y - 1)}{2} = 0 \Leftrightarrow (d) : 3x + 4y + 2 = 0.$$ Chọn D

Câu 22. Ta có :

Nên $T_{\overrightarrow{BC}}$ biến B thành C.

Vậy $T_{\overrightarrow{AC}} \circ T_{\overrightarrow{BA}} = T_{\overrightarrow{BC}}$. Chọn B



Câu 23. Ta có : $A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AC}}} C \xrightarrow{T_{\overrightarrow{CB}}} B$, nên $T_{\overrightarrow{AB}}$ biến A thành B. Do đó :

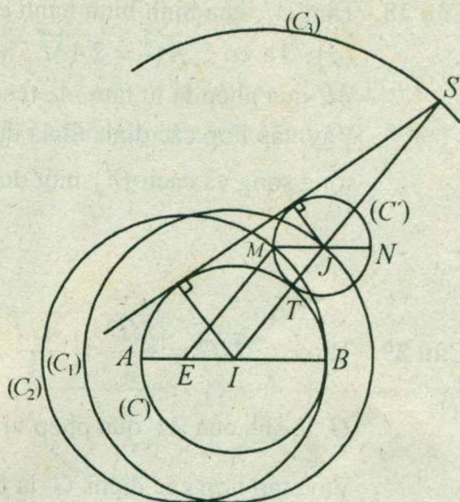
$T_{\overrightarrow{CB}}\, o\, T_{\overrightarrow{AC}} = T_{\overrightarrow{AB}}$.

Ta có : $B \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} A$, do đó :

$A \xrightarrow{T_{\overrightarrow{AC}}} C \xrightarrow{T_{\overrightarrow{CB}}} B \xrightarrow{T_{\overrightarrow{BA}}} A$

$\Leftrightarrow T_{\overrightarrow{BA}}\, o \left(T_{\overrightarrow{CB}}\, o\, T_{\overrightarrow{AC}}\right) = T_{\overrightarrow{BA}}\, o\, T_{\overrightarrow{AB}} = e$, với e là phép đồng nhất. Chọn C

Câu 24. Ta có : $\overrightarrow{JM} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{2}$, nên M là ảnh của J qua phép tịnh tiến theo vectơ $\dfrac{\overrightarrow{IA}}{2}$. Với $IJ = IT + TJ = 2 + 1 = 3$, nên J chạy trên đường tròn (C_1) tâm I bán kính $R_1 = 3$. Vậy, tập hợp các điểm M là đường tròn (C_2) tâm E bán kính $R_2 = 3$, với $\overrightarrow{IE} = \dfrac{\overrightarrow{IA}}{2}$



Chọn D

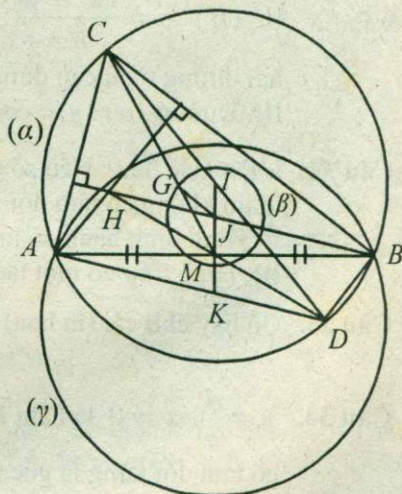
Câu 25. S là tâm của phép vị tự biến (C) thành (C') theo tỉ số $k = \dfrac{R'}{R} = \dfrac{1}{2}$.

Ta có : $\dfrac{SJ}{SI} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow SI = 2SJ = 2.IJ = 2.3. = 6$. Vậy, tập hợp các điểm S là đường tròn (C_3) tâm I bán kính bằng 6. Chọn A

Câu 26. Ta có : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MC}$, nên G là ảnh của C trong phép vị tự tâm M, tỉ số $k = \dfrac{1}{3}$.

Vậy, khi C chạy trên (α) thì tập hợp các điểm G là đường tròn (β), tâm J với $\overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{MI}$, bán kính bằng $\dfrac{R}{3}$.

Chọn C



Câu 27. Ta có : $\widehat{CAD} = \widehat{CBD} = 90^0$; AH và BH lần lượt vuông góc với BC và AC; nên AH và DB song song, AD và BH song song. Suy ra $AHBD$ là hình bình hành.

Ta có : M là trung điểm của đường chéo DH. Do đó, H là điểm đối xứng của D qua M. Vậy, khi (D) chạy trên (α) thì tập hợp các điểm H là đường tròn (γ), tâm K với $\overrightarrow{MK} = -\overrightarrow{MI}$, bán kính R.

Chú ý : Có thể dùng phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{u} = 2\overrightarrow{IM}$ biến C thành H.

Chọn B

Câu 28. Tâm M của hình bình hành chuyển động trên (d). Ta có : $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$, nên C là ảnh của M qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k = 2$.

Vậy, tập hợp các đỉnh C là đường thẳng (D_1) song song và cách (d) một đoạn thẳng AH.

Chọn A

Câu 29. Ta có : $\overrightarrow{MG} = \dfrac{\overrightarrow{MC}}{3} = \dfrac{\overrightarrow{AM}}{3}$, nên $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MG} = \dfrac{4\overrightarrow{AM}}{3}$. Do đó, G là ảnh của M qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \dfrac{4}{3}$.

Vậy, tập hợp các điểm G là đường thẳng (a) song song với (d) và cách A một đoạn bằng $\dfrac{4AH}{3}$.

Chọn D

Câu 30. Cả ba đường (C), (E) và (H) có cùng tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

Chọn D

Câu 31. I. $(C): y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a \neq 0$, có tâm đối xứng là điểm uốn.

II. $(H): y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{b'x + c'}$, $b' \neq 0$, có tâm đối xứng là giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên.

III. Đường $(\alpha): y = \cos x$ không có tâm đối xứng trên $\mathbb{R}$. Chọn B

Câu 32. I. Đa giác đều : Nếu số cạnh n chẵn thì có tâm đối xứng ; Nếu số cạnh n lẽ thì không có tâm đối xứng.

II. Hình bình hành có một tâm đối xứng là giao điểm của hai đường chéo.

III. Hình tròn có một tâm đối xứng là tâm I. Chọn C

Câu 33. Có bảy chữ cái (in hoa) là H, I, N, O, S, X, Z. Chọn D

Câu 34. $y = \dfrac{4}{x}$, $x \neq 0$ là hàm số lẻ, nên đồ thị có tâm đối xứng là gốc tọa độ O.

- $y = \tan x$, $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right)$ là hàm số lẻ, nên đồ thị có tâm đối xứng là gốc tọa độ O.
- Tương tự với hai hàm số $y = \sin x$, $x \in (-\pi; \pi)$ và $y = 2x^3$. Chọn D

Câu 35. Ta có : $Đ_{O_1}: M \longrightarrow M_1: \overrightarrow{MO_1} = \overrightarrow{O_1M_1} \Rightarrow \overrightarrow{MM_1} = 2\overrightarrow{O_1M_1}$;

$Đ_{0_2} : M_1 \longrightarrow M_2 : \overrightarrow{M_1O_2} = \overrightarrow{O_2M_2} \Rightarrow \overrightarrow{M_1M_2} = 2\overrightarrow{M_1O_2}$.

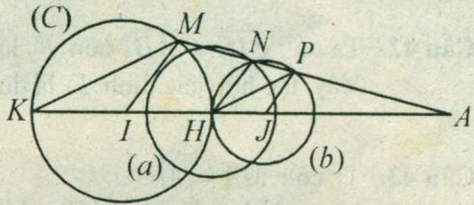
Do đó : $\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1M_2} = 2\left(\overrightarrow{O_1M_1} + \overrightarrow{M_1O_2}\right) = 2\overrightarrow{O_1O_2}$.

Vậy, hợp thành của hai phép đối xứng tâm là phép tịnh tiến. Chọn A

Câu 36. Ta có : $\dfrac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{HN}}{\overline{IM}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AI}} = \dfrac{2}{3}$.

Nên N là ảnh của M qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \dfrac{2}{3}$.

Vậy, tập hợp các điểm N là đường tròn (a) tâm H bán kính bằng $\dfrac{2R}{3}$.



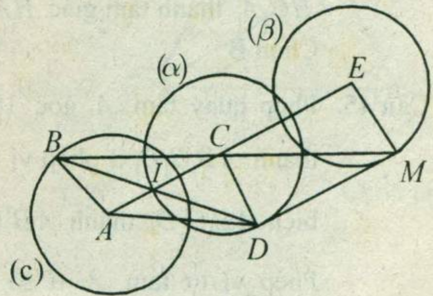
Chọn C

Câu 37. Ta có : $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \dfrac{\overline{HP}}{\overline{RM}} = \dfrac{\overline{AH}}{\overline{AK}} = \dfrac{1}{2}$. Nên P là ảnh của M qua phép vị tự tâm A, tỉ số $k = \dfrac{1}{2}$. Từ P vẽ PJ song song với MI cắt AI tại J.

Ta có : $\dfrac{\overline{PJ}}{\overline{MI}} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AM}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow JP = \dfrac{IM}{2} = \dfrac{R}{2}$. Vậy, tập hợp các điểm P là đường tròn (b) tâm J bán kính bằng $\dfrac{R}{2}$. Chọn A

Câu 38. Ta có : $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IB}$. Nên phép đối xứng tâm I biến B thành D và A thành C. Vậy hợp các đỉnh D là đường tròn (α) tâm C bán kính R.

Chọn B

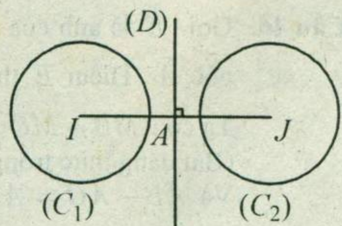


Câu 39. Vẽ $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC}$. Ta có : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, nên phép đối xứng tâm C biến B thành M và A thành E. Vậy, tập hợp các điểm M là đường tròn (β) tâm E bán kính R.

Chọn D

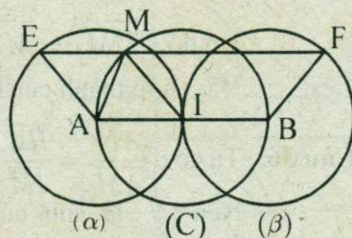
Câu 40. Gọi A là trung điểm của đoạn IJ. (C_1) và (C_2) là ảnh của nhau qua :

- Phép đối xứng tâm A
- Phép đối xứng trục là trung trực của đoạn IJ.
- Phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{IJ}$.



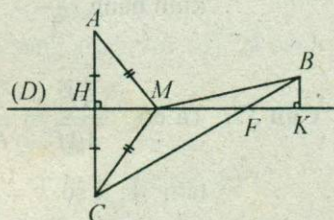
• Cả ba phép trên đều đúng. Chọn D

Câu 41. Ta có : $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{IA}$, nên E là ảnh của A qua phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{IA}$.
Vậy, tập hợp các đỉnh E là đường tròn (α) tâm A bán kính R.
Chọn A

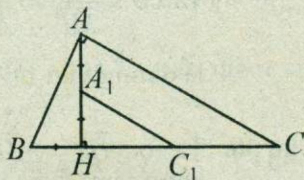


Câu 42. Ta có : $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{AB}$, nên F là ảnh của M qua phép tịnh tiến vectơ $\overrightarrow{AB}$.
Vậy, tập hợp các đỉnh F là đường tròn (β) tâm B bán kính R.
Chọn C

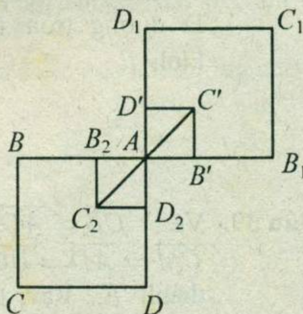
Câu 43. Ta có : $MA = MC$.
Nên $MA + MB = MC + MB$ ngắn nhất khi M ở trên đoạn BC ; nhưng M ở trên (D). Vậy M trùng với giao điểm F của (D) và BC.
Chọn D



Câu 44. Phép vị tự tâm H, tỉ số $\frac{1}{2}$ biến tam giác HCA thành tam giác HC_1A_1.
Phép quay tâm H góc 90^0 biến tam giác HC_1A_1 thành tam giác HAB.
Chọn B



Câu 45. Phép quay tâm A góc 180^0 biến $ABCD$ thành $AB_1C_1D_1$; phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến $AB_1C_1D_1$ thành $AB'C'D'$.
Phép vị tự tâm A tỉ số $\frac{1}{2}$ biến $ABCD$ thành $AB_2C_2D_2$; phép đối xứng tâm A biến $AB_2C_2D_2$ thành $AB'C'D'$.



Chọn C

Câu 46. Gọi E là ảnh của C qua phép đối xứng trục là phân giác trong A_z của góc $\widehat{A}$. Điểm E thuộc AB ; $MC = ME$ và $AC = AE$.
Ta có : $MB - MC = MB - ME < BE$. (1)
(Bất đẳng thức trong tam giác MBE).
Và $AB - AC = AB - AE = BE$. (2)

Từ (1) và (2) ta có : $MB - MC < AB - AE$. Chọn A

Câu 47. Dùng hình vẽ câu 46. Gọi F là ảnh của C qua phép đối xứng trục là phân giác ngoài At của góc A. Điểm F thuộc AB ; $NC = NF$ và $AC = AF$. Bất đẳng thức trong tam giác NBF cho :

$$NB + NC = NB + NF > BF. \quad (3)$$

Và $AB + AC = AB + AF = BF (4)$. Từ (3) và (4) ta có :

$$NB + NC > AB + AC.$$

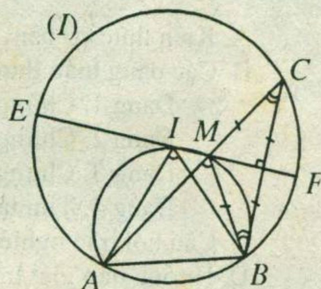
Chọn C

Câu 48. Ta có C thuộc (I) ; $MB = MC$ nên tam giác MBC cân tại M.

Do đó : $\widehat{B} = \widehat{C} = \dfrac{\widehat{AIB}}{2} = \alpha$ không đổi.

Ta có : $\widehat{AMB} = \widehat{B} + \widehat{C} = 2\alpha$.

Vậy, tập hợp các điểm M là cung tròn chứa góc $\widehat{AIB} = 2\alpha$ đi qua A và B.



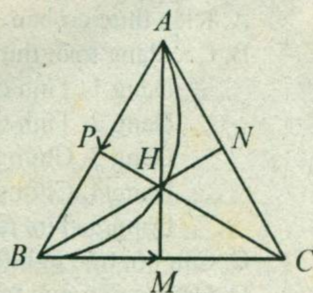
Chọn B

Câu 49. Ta có : $AP = AM = \dfrac{a}{2}$, a là cạnh của tam giác đều ABC ;

$(AP, BM) = (AB, BC)$

$= (HA, HB) = 120^0$.

Vậy $\overrightarrow{BM}$ là ảnh của $\overrightarrow{AN}$ qua phép quay tâm H góc quay 120^0. Tâm quay H là giao điểm của đường cao CP và cung chứa góc 120^0 đi qua A và B.

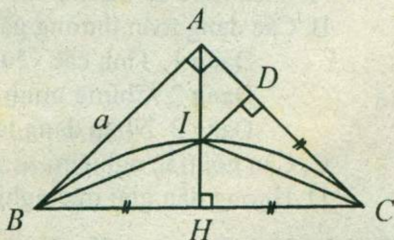


Chọn D

Câu 50. Ta có : $BH = CD = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ và

$(BH, CD) = (BC, CA) = 135^0$.

Vậy $\overrightarrow{CD}$ là ảnh của $\overrightarrow{BH}$ qua phép quay tâm I, góc quay 135^0 tâm quay I là giao điểm của trung trực AH của BC và cung tròn chứa góc 135^0 đi qua B và C.



Chọn A

MỤC LỤC

Lời nói đầu 3

Chuyên đề 1. Vectơ, các phép tính vectơ 5

A. Kiến thức cơ bản 5
B. Các dạng toán thường gặp 7
Dạng 1. Chứng minh hai vectơ bằng nhau 7
Dạng 2. Chứng minh một đẳng thức vectơ 8
Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng 9
Dạng 4. Tìm tập hợp điểm 9
C. Câu hỏi trắc nghiệm 10
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 17

Chuyên đề 2. Tích vô hướng của hai vectơ 23

A. Kiến thức cơ bản 23
B. Các dạng toán thường gặp 25
Dạng 1. Tính các giá trị lượng giác hoặc biểu thức lượng giác 25
Dạng 2. Tính tích vô hướng 25
Dạng 3. Chứng minh đẳng thức bằng tích vô hướng 27
Dạng 4. Chứng minh hai đường thẳng (đoạn thẳng) vuông góc 28
Dạng 5. Tìm tập hợp điểm 29
C. Câu hỏi trắc nghiệm 30
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 37

Chuyên đề 3. Hệ thức lượng trong tam giác 44

A. Kiến thức cơ bản 44
B. Các dạng toán thường gặp 45
Dạng 1. Tính các yếu tố trong tam giác 45
Dạng 2. Chứng minh các hệ thức giữa các yếu tố trong tam giác 46
Dạng 3. Nhận dạng tam giác 48
C. Câu hỏi trắc nghiệm 49
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 56

Chuyên đề 4. Trục toạ độ - Hệ trục toạ độ 63

A. Kiến thức cơ bản 63
B. Các dạng toán thường gặp 65
Dạng 1. Xác định điểm 65
Dạng 2. Chứng minh tính chất của một hình 67
C. Câu hỏi trắc nghiệm 69

D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 78

Chuyên đề 5. Đường thẳng 85

A. Kiến thức cơ bản 85
B. Các dạng toán thường gặp 88
Dạng 1. Viết phương trình đường thẳng 88
Dạng 2. Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng 90
Dạng 3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng 91
Dạng 4. Góc giữa hai đường thẳng 93
C. Câu hỏi trắc nghiệm 95
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 103

Chuyên đề 6. Đương tròn 109

A. Kiến thức cơ bản 109
B. Các dạng toán thường gặp 109
Dạng 1. Xác định tâm và bán kính đường tròn 109
Dạng 2. Viết phương trình đường tròn 111
Dạng 3. Tiếp tuyến với đường tròn 112
C. Câu hỏi trắc nghiệm 114
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 123

Chuyên đề 7. Ba đường cônic 133

A. Kiến thức cơ bản 133
B. Các dạng toán thường gặp 136
Dạng 1. Tìm các yếu tố của cônic 136
Dạng 2. Viết phương trình chính tắc của cônic 138
Dạng 3. Tìm điểm trên cônic thoả điều kiện cho trước 139
Dạng 4. Tính minh một tính chất của cônic 141
Dạng 5. Tập hợp điểm là cônic 142
C. Câu hỏi trắc nghiệm 143
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 163

Chuyên đề 8. Phép dời hình và phép đồng dạng 182

A. Kiến thức cơ bản 182
B. Các dạng toán thường gặp 185
Dạng 1. Xác định ảnh của một điểm, một hình qua phép biến hình hoặc dời hình 185
Dạng 2. Chứng minh tính chất của một hình bằng phép biến hình, dời hình 187
Dạng 3. Tìm tập hợp điểm 189
Dạng 4. Dựng hình bằng phép biến hình 190
C. Câu hỏi trắc nghiệm 191
D. Hướng dẫn giải trắc nghiệm 201

Mục lục 210

Chịu trách nhiệm xuất bản :
Chủ tịch HĐQT kiêm Tổng Giám đốc NGÔ TRẦN ÁI
Phó Tổng Giám đốc kiêm Tổng biên tập NGUYỄN QUÝ THAO

Tổ chức bản thảo và chịu trách nhiệm nội dung :
Giám đốc Công ti Cổ phần Đầu tư và Phát triển Giáo dục Đà Nẵng
HỒ VĂN LĨNH

Biên tập nội dung :
NGUYỄN VĂN NHO

Trình bày bìa :
NGUYỄN BÍCH LA

Sửa bản in :
HỒ SỸ THẮNG

Nơi chế bản :
PHÒNG KHAI THÁC BẢN THẢO
CÔNG TI CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG

RÈN LUYỆN KĨ NĂNG GIẢI BÀI TẬP TOÁN TRUNG HỌC PHỔ THÔNG
HÌNH HỌC PHẲNG
(Tự luận và trắc nghiệm)
Mã số: 8I657D8-ĐTĐ

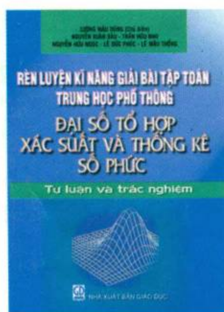
In 2.000 bản, khổ 17 x 24 cm tại Công ty In Thống kê & Sản xuất Bao bì Huế - 36 Phạm Hồng Thái Tp.Huế. Số đăng kí KHXB: 10-2008/CXB/167-2061/GD. In xong và nộp lưu chiểu tháng 11 năm 2008.

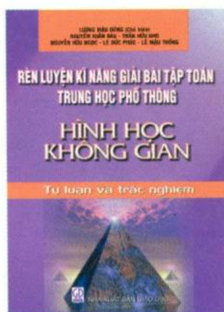


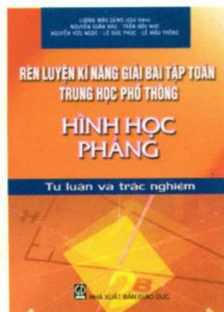
NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC - BỘ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
CÔNG TI CỔ PHẦN ĐẦU TƯ VÀ PHÁT TRIỂN GIÁO DỤC ĐÀ NẴNG
DANANG EDUCATION INVESTMENT AND DEVELOPMENT JOINT-STOCK COMPANY
15 Nguyễn Chí Thanh, TP. Đà Nẵng, Điện thoại : (0511) 3889952 - 3889954 - Fax : (0511) 3889953 - 3889957



GIỚI THIỆU BỘ SÁCH THAM KHẢO MỚI













Bạn đọc có thể mua sách tại các Công ti (CP) Sách - Thiết bị trường học ở các địa phương hoặc các cửa hàng sách của Nhà xuất bản Giáo dục :

- Tại TP. Hà Nội : 187 Giảng Võ ; 232 Tây Sơn ; 23 Tràng Tiền ; 25 Hàn Thuyên ; 38 Trần Quý Kiên ; 32E Kim Mã ; Số 3 ngõ 127, Văn Cao.
- Tại TP. Đà Nẵng : 247 Hải Phòng ; 78 Pasteur.
- Tại TP. Hồ Chí Minh : 104 Mai Thị Lựu, Quận 1 ; 240 Trần Bình Trọng, Quận 5 ; Số 5 Bình Thới, Quận 11.
- Tại TP. Cần Thơ : 5/5, đường 30/4.

Website : www.dautugiaoduc.com.vn





Giá: 30.500đ